Matematikklærebøker i Norge og i Singapore

En komparativ analyse av muligheten til å lære derivasjon

Marie Vaksvik Draagen og Camilla Helvig

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Utdanningsvitenskapelig fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Våren 2015

Matematikklærebøker i Norge og i Singapore

En komparativ analyse av muligheten til å lære derivasjon

2015

Matematikklærebøker i Norge og i Singapore

Marie Vaksvik Draagen og Camilla Helvig

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Matematikklærebøker har stor innflytelse på matematikkundervisningen i skolen og dermed også elevenes mulighet til å lære matematikk. Formålet med denne oppgaven har vært å undersøke hvilke muligheter lærebøker i Norge og Singapore gir elevene til å lære derivasjon. Problemstillingen er: *Hvilke muligheter gir norske og singaporeanske matematikklærebøker til å lære emnet derivasjon?*

Vi har gjennomført en kvalitativ dokumentanalyse der vi har undersøkt lærebøkenes fremstilling av derivasjon, samt struktur og oppgaver i derivasjonskapitlet. I tillegg har vi undersøkt lærebøker for ungdomstrinnet for en kvalitativ analyse av forkunnskapene til derivasjon og progresjon fram mot introduksjon av derivasjon. Vi har også gjennomført en kategorisering av matematikkoppgaver etter resonnementstype med rammeverket til Lithner (2008). Kategoriene viser grad av kreativitet i resonnementene som kreves for å løse oppgavene.

Funn fra analysen viser at de norske og singaporeanske lærebøkene kan gi mulighet til å lære derivasjon i ulik grad og på ulike måter. Alle lærebøkene gir mulighet til økt instrumentell og relasjonell forståelse. De singaporeanske lærebøkene vektlegger imidlertid relasjonell forståelse i større grad med en læringsmodell som gir mulighet til konstruksjon av egen kunnskap gjennom en aktiv elevrolle. Resultatene viser videre en mer jevn progresjon og en lenger modningsprosess av forkunnskapene til derivasjon blant de singaporeanske lærebøkene enn de norske lærebøkene. Kategoriseringen viste at det er størst andel oppgaver som krever imiterende resonnement i alle lærebøkenes derivasjonskapittel. De singaporeanske lærebøkene inneholder flere oppgaver som krever kreativt resonnement enn de norske lærebøkene.

Forord

Arbeidet med denne masteroppgaven er avslutningen på fem års studier ved lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo. Etter dette er vi ferdig utdannet som realfagslektorer med fordypning i matematikkdidaktikk, og vi gleder oss til å begynne å jobbe. Gjennom arbeid med denne masteroppgaven har vi fått større innsikt i matematikklærebøker og blitt inspirert til hvordan vi kan undervise og forklare matematikk, både av de singaporeanske og de norske lærebøkene.

Vi vil rette en stor takk til våre veiledere, førsteamanuensis Helmer Aslaksen og førsteamanuensis Arne Hole. Tusen takk for gode innspill, konstruktive tilbakemeldinger og interessante diskusjoner. I tillegg vil vi takke Helmer Aslaksen, Aschehoug og Gyldendal for tilgang til matematikklærebøker.

Avslutningsvis vil vi takke studievenner for fem fine år ved Universitetet i Oslo. Vi vil også takke hverandre for et hyggelig samarbeid om masteroppgaven. Vi har utfylt hverandre og gjennomført arbeidet med mange gode samtaler og mye latter.

Oslo, mai 2015

Marie Vaksvik Draagen og Camilla Helvig

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av forskningsprosjekt

Resultatene fra de internasjonale skoleundersøkelsene TIMSS og PISA viser lavere prestasjon i matematikk blant norske elever enn forventet (L. S. Grønmo et al., 2012; L. S. Grønmo, Olsen, & Bergem, 2005; L. S. Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010; Olsen & Kjærnsli, 2013). Dette er en av årsakene til den økende politiske interessen for matematikkopplæring i Norge. I etterkant av TIMSS har det blant annet blitt forsket på *muligheten til å lære.* Harskam og Suhre (1994) refererer til studien til Carrol fra 1963 og studien til Husén fra 1967 og definerer elevenes *mulighet til å lære* basert på hvilket faglig innhold som dekkes og hvor lang tid elevene får til å lære dette. Videre har forskning påvist en sammenheng mellom elevenes mulighet til å lære og deres faglige prestasjoner. I den forbindelse refererer Törnroos (2005) til forskningen til Schmidt fra 2001 som viser høy korrelasjon mellom lærebøkene som elevene bruker og elevenes prestasjoner på TIMSS. I tillegg påpeker Törnroos (2005) følgende: «Mathematics textbooks employed in classrooms are, anyhow, among the major factors that affect student's opportunities to learn mathematics.» (Törnroos, 2005, s. 317). Videre refererer Okeeffe (2013) til tidligere forskning, blant annet studien til Mikk fra 2000, som viser at lærere benytter seg av lærebøker i minst 90 % av undervisningstiden. Alt dette understreker matematikklærebøkers relevans i matematikkundervisningen.

Praksis i norsk skole har gitt oss varierte inntrykk av norske matematikklærebøker. I tillegg har vi reflektert mye over norske matematikklærebøker i undervisningen til førsteamanuensis Helmer Aslaksen ved Universitetet i Oslo. Med bakgrunn i dette, nevnte forskningsfunn og norske TIMSS-resultater i matematikk skal vi undersøke matematikklærebøker i Norge i vår masteroppgave. Vi skal sammenligne disse med matematikklærebøker i Singapore, da Singapore oppnår generelt gode resultater på internasjonale skoleundersøkelser (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2011; OECD, 2010). Det kan av den grunn være interessant å undersøke hvordan lærebøker i det landet er i forhold til lærebøker i Norge. I tillegg har vi fått inspirasjon og nok kunnskap til å velge Singapore som sammenligningsland ettersom vår veileder Helmer Aslaksen har bodd og undervist i Singapore i 22 år.

Med bakgrunn i beskrivelsene ovenfor ser vi et behov for forskning på *matematikklærebøker* og *muligheten til å lære*. Slik forskning kan bidra til å gi svar på hvordan kvaliteten på matematikkundervisningen i Norge kan økes ettersom matematikklærebøker påvirker undervisningen. Dette er også viktig for det norske samfunnets videre utvikling, da matematisk kompetanse omtales som en viktig faktor for det moderne samfunnet.

Hensikten med vår forskning er å undersøke hvilken *mulighet til å lære* lesing av matematikklærebøker gir. Mer konkret skal vi undersøke muligheten til å lære emnet derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene der dette emnet introduseres. Utgangspunktet for forskningen er følgende læreplanmål for Matematikk 1T på første trinn i videregående skole (VG1) i Norge: «Mål for opplæringa er at eleven skal kunne (…) gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar.» (Utdanningsdirektoratet, 2013b). I tillegg skal vi undersøke forkunnskaper fra lærebøker på tidligere klassetrinn i forbindelse med muligheten til å lære derivasjon.

Vi har utarbeidet følgende problemstilling og forskningsspørsmål:

Problemstilling: *Hvilke muligheter gir norske og singaporeanske matematikklærebøker til å lære emnet derivasjon?*

Forskningsspørsmål:

1. *Hvordan formidles emnet derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene?*

2. *Hvilket læringsutbytte kan oppgavene i derivasjonskapitlet i de norske og i de singaporeanske lærebøkene gi?*

3. *Hvilke forkunnskaper til derivasjon introduseres i de norske og i de singaporeanske lærebøkene, og på hvilke klassetrinn?*

1.2 Masteroppgavens innhold

Teorikapitlet inneholder en beskrivelse av matematikklærebøker som sjanger og bøkenes oppbygning. Kapitlet omfatter også forklaringer av matematisk kunnskap, med beskrivelser av ferdigheter og forståelse, samt teori om læring av matematikk med begreper som kunnskapstilegnelse og modningsprosess. Vi redegjør også for ulike måter å forklare matematikk på og ulike læringsmetoder i matematikk. Videre trekker vi frem teori om matematikkoppgaver, med beskrivelser av matematisk resonnering og refleksjon i matematikk. Et annet teoretisk aspekt ved lærebøker er det matematiske språket, og vi beskriver dette med språklige kjennetegn og dette språket i forbindelse med læring av matematikk. Videre trekker vi inn teori om motivasjon med beskrivelser av ulike motivasjonstyper og motivasjon i lærebøker. Teorikapitlet inneholder også teori om relevant matematikk for vår masteroppgave, teori om skolematematikk og skolesystemene i Norge og Singapore.

Metodekapitlet inneholder beskrivelser av metodene vi har benyttet oss av for å besvare hvert forskningsspørsmål. Hovedmetoden vår er dokumentanalyse. I tillegg har vi benyttet oss av rammeverket til Lithner (2008) for kategorisering av matematikkoppgaver ut i fra hvilket resonnement som kreves i løsningsprosessen. Metodene våre har gitt oss både kvantitative og kvalitative funn. Avslutningsvis i metodekapitlet er det redegjørelser for utvalg og vurderinger av reliabilitet og validitet.

Analysekapitlet inneholder funn fra kvantitativ analyse av matematikkoppgavene i derivasjonskapitlene, samt kvantitative funn om lærebøkenes struktur og andre nøkkeltall. Det inneholder også funn fra kvalitativ analyse av læreplanmålene for derivasjon i VG1 i Norge og SEC3/SEC4 i Singapore, i tillegg til funn fra kvalitativ analyse av struktur, innhold og oppgaver i lærebøkenes derivasjonskapittel. Til slutt er det funn fra kvalitativ analyse av forkunnskapene til derivasjon.

Diskusjonskapitlet inneholder refleksjoner knyttet til analysefunn og teori. Avslutningsvis konkluderer vi ut fra forskningsspørsmålene og problemstillingen, og gir en beskrivelse av våre erfaringer og refleksjoner fra arbeidet med masteroppgaven.

2 Teori

2.1 Matematikklærebøker

Matematikklærebøker tilhører læreboksjangeren og er skrevet for undervisnings- og læringssammenheng med utgangspunkt i læreplanen for matematikk (Okeeffe, 2013). Med bakgrunn i lærebøkers rolle i matematikkundervisningen, foreslår Törnroos (2005) å utvide pensummodellen. Opprinnelig består denne av *intended curriculum*, det vil si læreplanen, *implemented curriculum*, det vil si pensum undervist i klasserommet, og *attained curriculum*, det vil si resultatene av den gjennomførte undervisningen. Utvidelsen består i *potentially implemented curriculum*, det vil si lærebøker og annen type materiale som kan benyttes i undervisningen. Törnroos (2005) kommenterer følgende om dette nye nivået i modellen: «It reflects, on the one hand, the intended curriculum, (…), and, on the other hand, influences the implemented curriculum, for example by often defining the contents to be discussed during mathematics lessons.» (s. 317).

Videre påpeker Okeeffe (2013) at læreplanen kan tolkes på flere måter og derfor gi variasjon blant matematikklærebøker. Variasjon mellom matematikklærebøker skapes også av læringsmodeller for oppbygning av bøkene. Johansson (2005) skiller mellom to ulike læringsmodeller. Den første er «exposition-examples-excercises»-modellen (Johansson, 2005), der «exposition»-delen inneholder forklaringer som støtte til elevenes begrepsformasjon. Videre inneholder «examples»-delen eksempler med bruk av metoder og teknikker og excercises-delen inneholder øvingsoppgaver. Den andre modellen er «activities-cours-excercises» (Johansson, 2005). I «activities»-delen introduseres et nytt begrep gjennom utforskningsaktiviteter med eksperimentering og undersøkelser av matematikken. I slike aktiviteter er ofte hensikten at elevene skal komme fram til den generelle matematiske idéen eller regelen selv. Deretter følger «cours»-delen, som består av forklaringer og eksempler, og tilslutt oppgaver i «exercises»-delen. (Johansson, 2005).

Okeeffe (2013) peker på at en mulig utfordring knyttet til lærebøker er at teksten er åpen for elevenes egne tolkninger, og at disse i verste fall kan være feilaktige. Det finnes flere tiltak for å ivareta slike hensyn. For det første foreslår Okeeffe (2013) at en fageksepert, en lærer, en utdanningspsykolog, en illustratør og en tekstspesialist samarbeider om å skrive lærebøkene. For det andre er offentlig godkjenning av lærebøker et tiltak som kan gi kvalitet på lærebøkene. I Norge er det ikke et offentlig system for godkjenning av lærebøker (L. S.

Grønmo et al., 2010). I Singapore godkjennes matematikklærebøkene av en gruppe læreplanspesialister, lærere og akademikere (Baey, 2012). For det tredje kan samspillet mellom eleven, læreren og læreboken spille en viktig rolle for en god tolkning av lærebøkene:

> (…) når alle parter spiller sammen, blir det lærerens valg om eleven skal bestemme tilnærmingsmåten til boka eller om han lar læreboka bestemme tilnærmingen til eleven, altså hvilke veier kommunikasjonen skal ta. For eksempel kan starten være hos læreren og gå i ring, først til læreboka og videre til eleven, som så henvender seg tilbake til læreren. Snur vi retningen, blir undervisningssituasjonen en helt annen (…) (Herbjørnsen, 1999, s. 78-79).

2.2 Matematisk kunnskap og kompetanse

2.2.1 Ferdigheter og forståelse

L. S. Grønmo og Throndsen (2006) skiller mellom *ferdigheter* og *forståelse* i forbindelse med matematisk kunnskap. *Ferdigheter* omtales som prosedyrekunnskap, og innebærer kunnskap om bruk av algoritmer og *hvordan* en skal gjøre matematikken. I tillegg innebærer det opparbeiding av ferdigheter som kan automatiseres (L. S. Grønmo & Throndsen, 2006). *Forståelse* omtales som konseptuell kunnskap, og omhandler forståelse av matematiske sammenhenger og begreper (L. S. Grønmo & Throndsen, 2006). I henhold til L. S. Grønmo og Throndsen (2006) er begge formene for kunnskap nødvendige og viktig for den *funksjonelle matematikkunnskapen.* I tillegg til gode læringsstrategier, er den funksjonelle matematikkunnskapen avgjørende for gode prestasjoner i matematikk (L. S. Grønmo & Throndsen, 2006). Videre peker L. S. Grønmo (2005) på et gjensidig forhold mellom ferdigheter og forståelse, og at grunnleggende matematiske ferdigheter er en forutsetning for anvendelse av matematikken. Automatisering av ferdigheter er en nødvendighet i den forbindelse, men ikke alene tilstrekkelig for en fullstendig funksjonell matematikkunnskap (L. S. Grønmo & Throndsen, 2006). Når ferdigheter automatiseres gjennom ferdighetstrening, frigjøres mental kapasitet (L. S. Grønmo, 2005), og den frigjorte kapasiteten kan blant annet brukes til fokus på andre aspekter ved oppgaven som skal løses (Gjone & Brekke, 2001; L. S. Grønmo, 2005).

En viktig del av den matematiske kunnskapen er *matematiske begreper*. I engelske artikler og forskning er begreper som «mathematical concept» og «mathematical notion» knyttet til matematiske begreper. I denne oppgaven dekker *matematiske begreper* begge de engelske formuleringene, både som et matematisk begrep i seg selv og den matematiske idéen knyttet til begrepet. Innenfor matematiske begreper finner vi *avanserte matematiske begreper*, som er:

> (…) totally inaccessible to our senses - they can only be seen with our mind's eyes. Indeed, even when we draw a function or write down a number, we are very careful to emphasize that the sign on the paper is but one among many possible representations of some abstract entity, which by itself can be neither seen nor touched. (Sfard, 1991, s. 3).

Sfard (1991) skiller mellom to måter å oppfatte et matematisk begrep på; *operasjonell* og *strukturell oppfatning*. En strukturell oppfatning er en oppfatning av det matematiske begrepet som et abstrakt objekt eller en enhet, som nevnt i sitatet over. En operasjonell oppfatning innebærer derimot at det matematiske begrepet oppfattes som en prosess eller en prosedyre. Sfard (1991) trekker frem et eksempel knyttet til funksjonsbegrepet som illustrerer forskjellen mellom strukturelle og operasjonelle oppfatninger av matematiske begreper. En operasjonell oppfatning av funksjoner er å definere det som en prosess der en regner ut funksjonsverdier. En strukturell oppfatning av funksjoner er å definere det som en mengde ordnede par av argumenter og funksjonsverdier Sfard (1991).

Videre presiserer Sfard (1991) at en både kan ha en operasjonell og strukturell oppfatning av et begrep. Det er en dualitet mellom disse oppfatningene og «(…) the processes of learning and of problem-solving consist in an intricate interplay between operational and structural conceptions of the same notions.» (Sfard, 1991, s. 1). Skillet mellom operasjonelle og strukturelle oppfatninger kan sees i sammenheng med skillet mellom *instrumentell* og *relasjonell forståelse*. Bakgrunnen er at et menneskes forståelse påvirkes av egen evne til å oppfatte et begrep operasjonelt og strukturelt, og ulike typer oppfatninger leder til ulike former for forståelse (Sfard, 1991). Skemp (1979) definerer *instrumentell forståelse* på følgende måte: «Instrumental understanding, in a mathematical situation, consists of recognizing a task as one of a particular class for which one already knows a rule.» (s. 259). Relasjonell forståelse i matematisk sammenheng defineres av Skemp (1978) imidlertid som: «(…) knowing both what to do and why.» (s. 20). I denne oppgaven oppfatter vi relasjonell og konseptuell forståelse som det samme.

I forbindelse med matematisk forståelse er *misoppfatninger* et viktig begrep å trekke frem. Misoppfatninger er «(…) ufullstendige tanker knyttet til et begrep (…)» (Brekke, 1995, s. 10), og kan oppstå som følge av overgeneralisering av kunnskaper. Overgeneralisering betyr her å trekke slutninger om at aspekter ved et begrep gjelder i flere tilfeller enn det gjør i virkeligheten. Slike overgeneraliseringer kan komme av erfaringer innenfor et begrenset område av et begrep, og gir dermed en begrenset tankemodell for begrepet. Det betyr at begrepet er utviklet som et delvis begrep (Brekke, 1995). Det er flere kilder til misoppfatninger, og Vogt og Nordtvedt (2012) referer til studien til Erlwanger fra 1975 og studien til Wiliam fra 2007 som viser at overfokus på regler er en av disse.

2.2.2 Begrepsdefinisjon og begrepsbilde

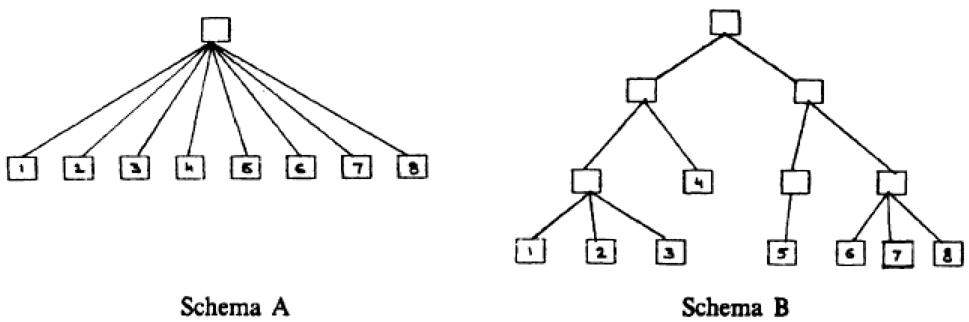
I teori om matematiske begreper skiller Tall og Vinner (1981) mellom *begrepsdefinisjon og begrepsbilde*. *Begrepsdefinisjon* er den definisjonen som regnes som standard i matematikkmiljøet (Tall & Vinner, 1981). *Begrepsbilde* defineres av Tall og Vinner (1981) som «(…) the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.» (s. 152). Begrepsbildet består av elevenes oppfatninger, erfaringer og tanker om begrepet (Tall & Vinner, 1981). Begrepsbildet formes i stor grad av de matematiske eksemplene en har tilgang til når en lærer om et begrep (Niss, 2006).

Forholdet mellom begrepsdefinisjonen og elevenes egne begrepsbilder er avgjørende for matematikklæring. I henhold til Niss (2006) skapes det avstand mellom begrepsbilde og begrepsdefinisjonen dersom kun deler av begrepsdefinisjonen blir dekket av eksemplene elevene har tilgang til. Denne uoverensstemmelsen kan føre til læringsvanskeligheter. Tall og Vinner (1981) trekker frem at et begrepsbilde kan bli enda mer begrenset dersom det for eksempel kun fokuseres på en begrepsdefinisjon med en matematisk formel i fokus. Elevene kan ha kompetanse i bruk av denne formelen i en gitt kontekst, men manglende kompetanse for bruk i andre kontekster der formelen kan være utilstrekkelig. For at elevene skal utvikle forståelse for de matematiske begrepene, er det viktig at de ser begrepene fra ulike perspektiver og i ulike kontekster (Brekke, 1995). Det er også viktig at elevene får innsikt i begrepets tilknytning til andre matematiske begreper og praktiske situasjoner (Brekke, 1995). På denne måten kan elevenes begrepsbilde utvides og avstanden til begrepsdefinisjonen reduseres.

2.3 Læring, modningsprosess og progresjon

2.3.1 Skjemabegrepet, assimilasjon og akkomodasjon

I henhold til konstruktivistiske læringsteorier blir et individs kunnskap konstruert i møte med omgivelsene og tilhørende erfaringer (Helland, Manger, Lillejord, & Nordahl, 2010). Gjennom slik konstruksjon får individet et eierforhold til egen kunnskap (Hovik, 2006). En kan skille mellom den kognitive konstruktivismen etter Piaget og den sosiale konstruktivismen etter Vygotsky (Helland et al., 2010). Teorien til Piaget kan beskrive elevenes læringsprosess i matematikk i forbindelse med kunnskap og kunnskapstilegnelse. Sentralt i denne teorien er skjemabegrepet (Solvang, 1992). I dette begrepet er skjemaene delstrukturer som bygger opp vår kognitive struktur, bestående av våre kunnskaper og tidligere erfaringer. Sfard (1991) peker videre på at de kognitive skjemaene er utformet på ulike måter avhengig av begrepsutviklingen. Sfard (1991) skiller mellom sekvensielle skjemaer og hierarkiske skjemaer i sin modell:



Figur 1: Sekvensielle (skjema A) og hierarkiske (skjema B) kognitive skjema. Hentet fra Sfard (1991).

Det hierarkiske kognitive skjemaet, skjema B i Figur 1, består av noder som representerer mentale bilder. Disse kan fungere som veivisere i en problemløsningsprosess ved å gi bedre oversikt (Sfard, 1991). Slike hierarkiske skjemaer er bedre tilpasset menneskets hukommelse og gjør de kognitive prosessene mer effektive enn sekvensielle skjemaer.

Piagets teori understreker relevansen av solide forkunnskaper i matematikk, fordi den kognitive strukturen, med elevenes kunnskap og tidligere erfaringer, er en forutsetning for tilegnelse av ny kunnskap (Solvang, 1992). Disse forkunnskapene aktiveres av erfaring med nye utfordringer (Solvang, 1992). Videre er *assimilasjon* og *akkomodasjon* to viktige begreper innenfor Piagets teori om kunnskapstilegnelse. Assimilasjon er prosessen der elevene får en utfordring som må «(…) tilpasses til et allerede eksisterende skjema.»

(Solvang, 1992, s. 79). Akkomodasjon er prosessen som foregår når elevene får nye utfordringer de ikke vet hvordan de skal takle og som de ikke har noe skjema å assimilere den nye kunnskapen i. Derfor er det nødvendig å utvide og omstrukturere eksisterende skjemaer (Solvang, 1992).

2.3.2 Modningsprosess og progresjon

Det er flere måter å organisere progresjon i matematikkundervisningen, og blant disse er spiralprinsippet. Med dette prinsippet blir de samme matematiske emnene undervist med jevne mellomrom. Kunnskapen utvikles mer og mer med ny tilleggskunnskap for hver gang (Botten, 1999). I henhold til Botten (1999) er hensikten med dette prinsippet å vedlikeholde elevenes eksisterende kunnskaper, samtidig som de utvides med jevn progresjon. Botten (1999) påpeker imidlertid at dette kan resultere i overfladisk kunnskap og at elevene ofte må starte ved samme utgangspunkt hver gang. I verste fall kan dette føre til en sirkelgang i undervisningen der progresjonen mer eller mindre stagnerer. Botten (1999) trekker frem et alternativ til spiralprinsippet der elevene arbeider med beslektede emner over lengre tidsperioder. Da er det, i henhold til Botten (1999), viktig med fokus på elevaktivitet og forståelse, og mindre vektlegging av rutineoppgaver. Dette kan gi elevene anvendelig kunnskap utviklet gjennom erfaringer og forståelse (Botten, 1999).

I henhold til Gjone og Brekke (2001) er et individs kunnskap «(…) resultater av denne personens modning.» (s. 249). Sentralt i modningen er den mentale utviklingsprosessen. Denne prosessen er tilknyttet refleksjoner rundt egne erfaringer og gir ulike muligheter for omstrukturering av de kognitive skjemaene. I undervisningssammenhengen har elevene ulike erfaringer, og dermed også ulike refleksjoner, knyttet til et matematisk begrep (Gjone & Brekke, 2001). Det gir flere ulike kognitive skjemaer og ulike muligheter for omstrukturering blant elevene. Gjennom matematiske aktiviteter og undervisning kan eksisterende skjemaer utvides og bygges om (Solvang, 1992). Da får elevene nye erfaringer som kan knyttes til den eksisterende kunnskapen slik at ny kunnskap kan tilegnes. En utfordring i den forbindelse er den varierende tidsbruken for ombygging av eksisterende skjemaer blant elevene (Solvang, 1992).

2.3.3 Begrepsutvikling

Sfard (1991) deler begrepsutvikling inn i tre faser: *interorization, condensation og reification*. I interorization, som er den første fasen, utfører eleven regneoperasjoner for å bli kjent med det operasjonelle knyttet til det matematiske begrepet. Den neste fasen, condensation, er: «(…) a period of "squeezing" lengthy sequences of operations into more manageable units. At this stage a person becomes more and more capable of thinking about a given process as a whole (…)» (Sfard, 1991, s. 19). Denne fasen foregår som oftest over et lengre tidsrom, eleven er i denne fasen så lenge han eller hun relaterer begrepet til det operasjonelle. I den siste fasen, reifikasjonsfasen, klarer eleven å oppfatte begrepet som et strukturelt objekt. Alt i alt er denne begrepsutviklingen i tre faser en tidkrevende prosess. Elevenes begrepsutvikling skjer gradvis i de to første fasene, men overgangen til den tredje og siste fasen skjer plutselig (Sfard, 1991).

I de to første fasene av den nevnte begrepsutviklingen, har elevene en operasjonell begrepsoppfatning (Sfard, 1991). Med denne oppfatningen er kunnskapen lagret i sekvensielle skjemaer på en ustrukturert måte. Dette er uheldig for videre begrepsutvikling, fordi oppbygningen gir en lav kognitiv kapasitet i forbindelse med til tilegnelse av nye kunnskapsmengder. Reifikasjonen i den siste fasen gir derimot en strukturell oppfatning av begrepet. Da omstruktureres de sekvensielle skjemaene til et hierarkisk skjema (Sfard, 1991) (se Figur 1). Slike skjemaer er bedre tilpasset menneskets hukommelse, gjør de kognitive prosessene mer effektive og øker den kognitive kapasiteten. I prosessen blir også nye lag lagt til den kognitive strukturen. Resultatet av prosessen er en relasjonell forståelse av begrepet (Sfard, 1991).

2.4 Formidling av matematikk

Det er mange ulike måter å forklare matematikk på, og flere metoder å undervise etter. De følgende avsnittene inneholder en beskrivelse av dette.

2.4.1 Den induktive metoden

Den induktive metoden omhandler eksperimentering med matematikk for å oppdage et mønster og matematiske sammenhenger. Basert på empirien fra eksperimenteringen skal elevene gjøre en «kvalifisert gjetning» og formulere en generell regel for den aktuelle matematiske idéen (Solvang, 1992). Bruk av den induktive metoden kan begrunnes ved at den gir elevene en aktiv rolle i egen læring (Center for Teaching and Learning, 2008). Videre påpeker Center for Teaching and Learning (2008) at aktiv læring gir et økt læringsutbytte for elevene, men at metoden er tidkrevende. Aktiv læring står i motsetning til en lærerstyrt tavleundervisning der det hovedsakelig er læreren som snakker og der elevene er passive mottakere av kunnskapen. Videre kan bruk av den induktive metoden begrunnes fra et matematikkhistorisk perspektiv. I henhold til Jankvist (2009) ble matematiske begreper ofte oppdaget ved at matematikere prøvde seg fram med ulike spesifikke, numeriske eksempler, og deretter trakk en generell slutning basert på eksemplene. Denne tankegangen kan også begrunne forklaringer der utgangspunktet er spesifikke eksempler som etter hvert generaliseres til det generelle matematiske begrepet.

2.4.2 Eksemplifiseringer

En form for induktiv undervisningsmetode er bruk av eksempler: «Å illustrere noe ved bare ett eksempel kan på mange måter tolkes som en induktiv arbeidsmåte med bare ett trinn fram til den kvalifiserte gjetningen.» (Solvang, 1992, s. 121). I henhold til Solvang (1992) kalles denne eksempelmetoden for redusert induksjon eller intuitiv arbeidsmåte. Et slikt eksempel er som følger: $\sqrt{9}\,\sqrt{25} \;=\; 15$ og $\sqrt{9 \times 25} \;=\; 15$. Av dette eksempelet, og lignende eksempler, kan elevene konkludere med den generelle regelen om multiplikasjon med kvadratrøtter. Å lese eksempler for å forstå et begrep kan også gi elevene den nødvendige instrumentelle forståelsen. Solvang (1992) påpeker imidlertid at det er viktig at læreren bruker eksempler på «(…) riktige steder og med vel gjennomtenkt presentasjon av stoffet.» (Solvang, 1992, s. 121) for å sikre at elevene også får en relasjonell forståelse for emnet.

2.4.3 Visualiseringer

Visualiseringer i matematikk er, i henhold til Zimmermann og Cunningham (1991), forklaringer med bruk av geometriske og grafiske representasjoner av konsepter, prinsipper eller problemer. Hensikten med visualiseringer i matematikkundervisningen er å gjøre abstrakte idéer mer overkommelige og konkrete (Sfard, 1991). Videre beskriver Zimmermann og Cunningham (1991) hensikten med visualisering i matematikkundervisningen som et hjelpemiddel i problemløsning, som en måte å oppnå forståelse på og som en måte å oppdage matematikken på. Det betyr at visualiseringen kan foregå mentalt eller visuelt på papir eller med elektronisk hjelpemiddel.

2.4.4 Bevis

Bevis er for det første, i henhold til Hanna (2001), en viktig del av matematikkundervisningen i skolen. En av begrunnelsene hennes er at bevis kan lede til matematisk forståelse hos elevene, og er en måte å vise det matematiske «maskineriet» som brukes til å løse problemer (Hanna, 2001). Niss (2006) peker også på positive aspekter ved bevis, slik som at bevis kan verifisere og forklare matematikken, i tillegg til å vise at en regel eller en idé holder generelt. Mange elever har imidlertid, i henhold til Niss (2006), utfordringer med å forstå bevis. Noen av årsakene er problemer med å forstå hva et bevis i det hele tatt er, i tillegg til problemer med å forstå hvorfor vi trenger bevis i matematikken.

2.5 Matematikkoppgaver

Oppgaveløsing er en sentral del av matematikkundervisningen Bakgrunnen er synet på matematikk som en *aktivitet*: «Matematikken er aktiviteten ved å for eksempel finne største felles faktor; den er ikke svaret eller symbolene – men selve *aktiviteten*.» (Gjone & Brekke, 2001, s. 219). I tillegg fører oppgaveløsing til at nye matematiske begreper knyttes til eksisterende kunnskap. Zhu og Fan (2006) skiller blant annet mellom *rutineoppgaver* og *ikke-rutineoppgaver*. De to typene er henholdsvis oppgaver der oppgaveløseren har og ikke har en kjent fremgangsmåte, algoritme eller formel for å løse oppgaven (Zhu & Fan, 2006). I henhold til Brekke (1995) preges tradisjonell matematikkundervisning av repeterende øvelser med rutineoppgaver for å styrke elevers forståelse (Brekke, 1995). Flere forskningsresultater viser imidlertid at det er: «(…) *bedre å arbeide grundig med et fåtall velvalgte aktiviteter enn å gjennomføre en lang rekke øvelser*.» (Brekke, 1995, s. 19).

2.5.1 Resonnering

Uansett typen matematikkoppgave, består løsningsprosessen av fire steg. Først leser oppgaveløseren matematikkoppgaven, deretter velger han eller hun en løsningsstrategi, for så å implementere strategien og til slutt komme frem til en konklusjon (Lithner, 2008). I tillegg inneholder løsningsprosessen bruk av *resonnementer*. Lithner (2008) definerer et resonnement som «(…) the line of thought adopted to produce assertions and reach conclusions in task solving.» (s. 257).

Det finnes flere ulike typer resonnementer, og Lithner (2008) skiller mellom *imiterende resonnement* (imitative reasoning, IR) og *kreativt resonnement* (creative mathematically founded reasoning, CMR). *Kreativt resonnement* foregår i forbindelse med løsning av oppgaver uten kjent fremgangsmåte eller der deler av løsningsmetoden er ukjent. I slike tilfeller må en ny resonneringssekvens dannes, i tillegg til refleksjon rundt valg av løsningsstrategi. Denne argumentasjonen i resonneringen bunner i iboende matematiske egenskaper (Lithner, 2008). *Imiterende resonnering* er derimot knyttet til oppgaver der løsningsmetoden er kjent for elevene. Innenfor denne typen resonnering skiller Lithner (2008) igjen mellom memoriserende resonnering (memorised reasoning, MR) og algoritmisk resonnering (algorithmic reasoning, AR). Memoriserende resonnering går ut på å huske et komplett svar og skrive ned dette. Algoritmisk resonnement går ut på å huske en kjent algoritme for å løse en oppgave. I henhold til Lithner (2008) er IR dominerende i tidligere gjennomførte studier, mens CMR er sjelden. Videre hevder Lithner (2008) at et stort fokus på den imiterende resonnementstypen AR i matematikkopplæringen hovedsakelig skyldes manglende læringsressurser. Et fokus på AR kan gi prestasjoner på kort sikt, fordi det er mange oppgaver som enkelt kan løses med resonnering av typen AR. Dette har imidlertid konsekvenser for elevenes læring på lang sikt. Imiterende resonnement kan føre til at de relasjonelle utfordringene ved oppgaven forsvinner, og kan igjen sette begrensninger på læringsutbyttet (Lithner, 2008). Løsning av oppgaver som krever CMR kan imidlertid fremme konseptuell forståelse (Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner, 2014). Denne typen forståelse og kreativt resonnement kan bidra til å gjøre matematikken meningsfull for elvene (Lithner, 2008).

2.5.2 Oppgavetyper

Det finnes flere trekk ved matematikkoppgaver. Løsning av visse typer oppgaver kan føre til mer *refleksjon* rundt matematikken. Wheatley (1992) referer til Siegel fra 1981 som hevder at r*efleksjon* i matematikk er distansering fra *å gjøre* matematikk. Gjennom refleksjon abstraheres verktøyene og prosedyrene som benyttes under metodiske løsningsprosesser (Carpenter & Lehrer, 1999). I henhold til Wheatley (1992) er det viktig at elevene reflekterer over det de gjør, og slik refleksjon kan skapes med begrunnelser av matematiske utregninger. Videre kan ofte evnen til å reflektere knyttes til evnen til å tilegne ny kunnskap (L. S. Grønmo & Throndsen, 2006). Løsning av andre typer oppgaver kan føre til økt *konsolidering*. Konsolideringsprosessen innebærer repetisjon av tilegnede kunnskaper for styrking av tankeskjemaer (Bø & Helle, 2008).

I oppgavesamlinger kan det være oppgaver på flere ulike nivåer. Slike *nivådifferensierte* oppgaver har til hensikt å rette undervisningen mot individene og bidra til at alle elevene får et godt læringstilbud tilpasset deres nivå (Mathiassen, 2009). Dette er knyttet til den *proksimale utviklingssonen*, som er et viktig begrep i Vygotskys utviklingsteori (Bråten & Thurmann-Moe, 1996). Med denne modellen må kompetanse knyttes til individets aktuelle og potensielle utviklingsnivå. De kognitive prosessene som allerede har foregått resulterer i individets aktuelle utviklingsnivå. Det potensielle utviklingsnivået kan oppnås gjennom samarbeid med andre, som lærer og medelever. Videre påpekes det at nivådifferensiert undervisning: «(…) møter elevene ut fra deres kognitive forutsetninger og ferdigheter.» (Mathiassen, 2009, s. 129). En slik tankegang om behovet for differensiert undervisning illustreres av flytsonemodellen. (Mathiassen, 2009). Denne modellen påpeker nødvendigheten av et samsvar mellom utfordringene som blir gitt og elevenes ferdigheter. Jo bedre samsvaret mellom disse to faktorene er, desto bedre blir elevenes læringsutbytte (Mathiassen, 2009).

2.6 Matematisk språk

Matematisk språk «(…) har sine faglige begrep, sine tegn og symboler og sin spesielle grammatikk.» (Pind, 2011, s. 19). Det er et teknisk og presist språk (Morgan, 2005). Det matematiske språket består av mange symboler og begreper, og symbolene kan representere både et matematisk objekt og en matematisk prosess (Tall, 1993). I forbindelse med matematikkundervisning vektlegger Leung (2005) viktigheten av at elevene venner seg til å bruke det matematiske språket aktivt fremfor et upresist og hverdagslig språk. Dette støttes av Thompson og Rubenstein (2000) som mener at elevene må kunne beherske det matematiske språket for å mestre matematikk. Videre foreslår Herbjørnsen (1999) at elevene må få trening i å forme presise matematiske formuleringer for å bruke språket som et verktøy i matematikken. De trenger også gode matematiske språkkunnskaper når de leser matematikk og når de utrykker seg matematisk (Thompson & Rubenstein, 2000). De må kunne uttrykke seg matematisk når de skal forklare sine metoder og trenger også å kunne det matematiske språket når de skal løse tekstoppgaver (Pierce & Fontaine, 2009). For at elevene skal oppnå gode resultater i matematikken er det viktig med bruk av matematisk terminologi (Thompson & Rubenstein, 2000).

Botten (1999) trekker frem to motstridende behov ved det matematiske språket. Det er et behov for at det skal være presise fagbegreper, men samtidig bør det matematiske språket knyttes opp mot den virkelige verden og forklares på en hverdagslig måte (Botten, 1999; Pierce & Fontaine, 2009). Maharaj (2008) understreker i den forbindelse at nye og ukjente symboler må forklares på en tydelig måte for elevene. Dette gjelder også når elevene erfarer kjente symboler i nye kontekster, for da kan det symbolene representerer være noe endret. Videre må elevene, i henhold til Hiebert og Carpenter (1992), forstå de matematiske symbolene før de kan få forståelse for prosedyrer der disse symbolene brukes. I tillegg til fokus på forklaring av symboler, er opplæring i de matematiske begrepene viktig for et godt matematisk språk. Holm (2012) påpeker videre at elevene bør få opplæring i relevante begreper når et nytt emne introduseres. Holm (2012) trekker også frem at begrepsopplæring ofte kan nedprioriteres i matematikkundervisningen i de høyeste klassetrinnene. Elevene på høyere klassetrinn har nødvendigvis ikke en fullstendig forståelse for alle begrepene selv om de har brukt disse før.

Språket har en sentral rolle i Vygotskys utviklingsteori, og er «(…) tenkningens sosiale redskap.» (Øzrek, 1996, s. 101). Dette forholdet mellom språk og tanke er et resultat av individets utvikling der språket er internalisert slik at tenkingen blir språklig (Bråten, 1996; Helland et al., 2010). Både Piaget og Vygotsky omtaler i den forbindelse en egosentrisk tale, det vil si tale som ikke er rettet mot andre individer (Kozulin, 2012). I henhold til Vygotsky leder egosentrisk tale mot en lydløs tale som blir viktig for tenkingen og som omtales som *indre tale* (Bråten, 1996). Språket er dermed nært tilknyttet en persons tankevirksomhet og fremmer kognisjon (Helland et al., 2010). Dette gjør indre tale til «(…) et viktig tankeredskap under problemløsning (…)» (Bråten, 1996, s. 31).

2.7 Motivasjon

I matematikkdidaktikken defineres motivasjon som «(…) å vekke interessen for noe (…)» (Solvang, 1992, s. 187) eller «(…) legitimere handlinger og mål (…)» (Solvang, 1992, s.

187). I generell motivasjonsteori skilles det mellom to typer motivasjon; *indre* og *ytre motivasjon.* Indre motiverte elever karakteriseres av et eget ønske til å lære. Ved indre motivasjon vil læringen «(…) holdes ved like på grunn av interesse for saken, lærestoffet eller handlingen i seg selv.» (Imsen, 2005, s. 382) og «(…) det oppleves som meningsfylt å holde på med det.» (Imsen, 2005, s. 382). Ved ytre motivasjon er det derimot en manglende interesse for læringen i seg selv. I de tilfellene holdes læringsprosessen i gang av ytre faktorer slik som visshet om en belønning eller muligheten til å nå et mål (Imsen, 2005).

Det finnes flere måter å motivere elevene på i deres læringsprosess. Den tidligere nevnte undervisningsmetoden aktiv læring, der elevene har en aktiv rolle i egen læring, kan øke elevenes motivasjon i læringsprosessen (Center for Teaching and Learning, 2008). Solvang (1992) trekker også frem flere måter elever kan motiveres på, deriblant *motivasjon ved bruksverdi.* Denne motivasjonstypen går ut på å minne elevene om at det de har lært før er nyttig i det de skal lære på det nåværende tidspunkt. Følgende beskrives om denne motivasjonen: «Når et svakt motivert tema endelig kommer til sin fulle rett, bør vi minne elevene om linjene bakover til den gang teamet ble innført.» (Solvang, 1992, s. 203). Videre omtaler Solvang (1992) praktiske situasjoner brukt i matematikkundervisningen, ulike og varierte forklaringsmetoder og den induktive metoden som andre mulige motivasjonsmidler i undervisningen. Den induktive metoden er det «(…) vanligvis lett å motivere for fordi den matematiske situasjonen innbyr til eksperimentering.» (Solvang, 1992, s. 231). I den forbindelse påpeker Solvang (1992) viktigheten av at det aktuelle matematiske begrepet som det eksperimenteres med, presenteres etter at elevene har gjennomført det empiriske forsøket. Elevene kan da få følelsen av at de leter etter en ukjent sammenheng (Solvang, 1992).

I matematikklærebøker er det flere aspekter som kan bidra til å motivere elevene til videre innsats, blant annet det Okeeffe (2013) omtaler som *motiverende elementer* i lærebøkene. I hennes lærebokanalyse ble følgende klassifisert som motiverende elementer: *historiske bemerkninger, biografier om vitenskapsfolk og matematikere, anvendelser av matematikken og bilder*. I tillegg til disse elementene, trekker Berisha, Thaçi, Jashari, og Klinaku (2013) frem *karriereinfo, praktiske implikasjoner og virkelighetsnære problemer* som andre motiverende elementer i en annen lærebokanalyse.

Elementene *historiske bemerkninger og biografier om vitenskapsfolk og matematikere* kan virke motiverende, fordi slik historisk kunnskap kan bidra til å *humanisere* matematikkfaget (Jankvist, 2009). I henhold til Jankvist (2009) er hensikten med denne humaniseringen å gi et «kaldt» fag et mykere ansikt utad ved å knytte faget til menneskelige følelser og menneskenes behov og motivasjon for å oppdage de ulike konseptene i matematikken. På den måten kan en også gjøre faget mindre «farlig» for elevene. I henhold til Fried (2001) kan en del av denne humaniseringen bestå i at elevene lærer om matematikerne bak de matematiske begrepene. Elevene kan dermed få matematikkhistoriske «forbilder» å se opp til, og på den måten vil matematikkundervisningen knyttes til menneskelige følelser og motivasjoner (Fried, 2001).

Klassifiseringen til Okeeffe (2013) av *anvendelser av matematikk i det virkelige liv* som et motiverende element, får støtte av Gravenmeijer og Doorman (1999). Slike anvendelser av matematikken kan blant annet defineres som *kontekstproblemer*: «Context problems are defined as problems of which the problem situation is experientially real to the student.» (Gravenmeijer & Doorman, 1999, s. 111). De trekker i den forbindelse frem positive aspekter ved kontekstproblemer: «They are endorsed because of today's emphasis on the usefulness of what is learned, and because of their presumed motivational power.» (Gravenmeijer & Doorman, 1999, s. 111). Kontekstskaping i matematikken kan også bidra til å gjøre matematikken mer meningsfull for elevene, og dette vektlegges blant annet av Mellin-Olsen (1981). Det er viktig at lærestoffet plasseres i en meningsfull kontekst for elevene, hvis ikke kan det hende at elevene plasserer læringsstoffet i konteksten av å måtte lære det fordi de er på skolen (Mellin-Olsen, 1981).

2.8 Tidligere relevant forskning

Nilsen (2013) har undersøkt undervisning av funksjoner og norske elevers oppfatning av dette emnet i forbindelse med overgangen fra ungdomsskolen til videregående skole. Forskningen viste forskjeller i hvordan emnet funksjoner ble undervist på ungdomsskolen og i den videregående skolen. Eksempelvis tar undervisningen på ungdomsskolen generelt utgangspunkt i en differanse med én enhet mellom x-verdier for beregning av stigningstall. I henhold til Nilsen (2013) kan vanskeligheter i derivasjon skyldes elevenes lite fleksible metoder for beregning av stigningstall. Han mener derfor at mer fleksible metoder, som «(…) height divided by length (…)» (Nilsen, 2013, s. 190), bør innføres i ungdomsskolen. Slike metoder kan forberede elevene på notasjonen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ som brukes i derivasjon. Resultatene til Nilsen (2013) om undervisning på ungdomsskolen viser også et stort fokus på lineære funksjoner, og lite vektlegging av ikke-lineære funksjoner. Dette kan føre til at emnet momentan vekstfart nedprioriteres på ungdomsskolen. Et annet aspekt som trekkes fram i forskningen hans er et stort fokus på regler og prosedyrer i derivasjon. I tillegg påpeker han at det innføres mange nye symboler i den videregående skolen, spesielt i forbindelse med derivasjon.

2.9 Matematisk teori

I det følgende beskrives relevant matematisk teori for vår masteroppgave slik det omtales i resten av oppgaven.

Vi definerer *derivasjon* på følgende måte: «Den deriverte er den øyeblikkelige endringsraten» (Hole, 2006, s. 182). Denne endringsraten omtales som *momentan vekstfart* i denne oppgaven. Det vil si: «Hvor fort endrer størrelsen seg *akkurat nå*?» (Hole, 2006, s. 175). Utgangspunktet for å finne denne øyeblikkelige endringen er den *gjennomsnittlige endringshastigheten*, som er den gjennomsnittlige endringen over et intervall (Hole, 2006). Denne omtaler vi som *gjennomsnittlig vekstfart* i oppgaven, og er stigningstallet til sekanten mellom endepunktene i intervallet. Den deriverte er grenseverdien til den gjennomsnittlige endringshastigheten når en lar endepunktene i intervallet nærme seg hverandre. Følgende uttrykk er *grenseverdidefinisjonen av den deriverte*: «$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$» (Lindstrøm, 2006, s. 254). Denne viser at den deriverte i $x = a$, eller stigningstallet til tangenten gjennom $x = a$, er en tilnærming til den gjennomsnittlige vekstfarten mellom $x = a$ og $x = a + \Delta x$ på grafen til $f(x)$.

Maksimums- og minimumspunkter kan defineres på to måter. Med utgangspunkt i *nabopunktene* definerer Lindstrøm (2006) lokale og globale maksimum som følgende:

> Et punkt $a \in \mathbb{R}$ kalles et *lokalt maksimum* for en funksjon *f* dersom det finnes et tall $\delta > 0$ slik at $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f \cap (a - \delta, a + \delta)$. Vi kaller a et *(globalt) maksimum* dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$. (s. 281).

Lokale og globale minimum defineres på tilsvarende måte: «(…) $a \in \mathbb{R}$ er et *lokalt minimum* for f dersom det finnes et tall $\delta > 0$ slik at $f(a) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f \cap (a - \delta, a + \delta)$. Vi kaller a et *(globalt) minimum* dersom $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.» (Lindstrøm, 2006, s. 281). Betegnelsen *absolutt maksimum* og *minimum* kan benyttes i stedet for *globalt maksimum* og *minimum* (Lindstrøm, 2006).

Med utgangspunkt i *den deriverte* defineres lokale maksimum slik:

> Anta at f er kontinuerlig i c og deriverbar i alle punkter i en omegn $(c - \delta, c + \delta)$

unntatt muligens i c selv. Dersom $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in (c - \delta, c)$ og $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in (c, c + \delta)$ så er c et lokalt maksimum. (Lindstrøm, 2006, s. 282)

Videre defineres lokale minimum på tilsvarende måte: «Dersom $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in (c - \delta, c)$ og $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in (c, c + \delta)$ så er c et lokalt minimum.» (Lindstrøm, 2006, s. 282). Terrassepunkter defineres ikke spesifikt, men det kommenteres at: «Dersom f' har samme fortegn i begge intervallene $(c - \delta, c)$ og $(c, c + \delta)$, så er c hverken et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.» (Lindstrøm, 2006, s. 282). Basert på dette defineres et *terrassepunkt* i denne oppgaven som et punkt c der $f'(c) = 0$, og f' har samme fortegn i intervallene $(c - \delta, c)$ og $(c, c + \delta)$.

Et annet relevant begrep er *randpunkter*. For full uttelling på eksamensoppgaver om funksjonsdrøfting må randpunkter inkluderes som maksimums- og minimumspunkter (Utdanningsdirektoratet, 2015). Det at randpunkter er maksimums- og minimumspunkter kommer frem av følgene: «Anta at funksjonen $: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum eller minimum i c. Da er enten (i) c et av endepunktene a og b eller (ii) $f'(c) = 0$ eller, (iii) f ikke deriverbar i c.» (Lindstrøm, 2006, s. 281). Videre er «(…) c et *kritisk punkt* for funksjonen f dersom det faller i en av de tre kategoriene (i) – (iii) ovenfor.» (Lindstrøm, 2006, s. 282).

2.10 Matematikk i Norge og i Singapore

Både Norge og Singapore er nasjoner med en forståelse av matematikk som grunnleggende for samfunnets utvikling. De norske utdanningsmyndighetene påpeker følgende om matematikk i den forbindelse: «Faget grip inn i mange vitale samfunnsområde, som medisin, økonomi, teknologi, kommunikasjon, energiforvaltning og byggjeverksemd. Solid kompetanse i matematikk er dermed en føresetnad for utvikling av samfunnet.» (Utdanningsdirektoratet, 2013a). De singaoreanske utdanningsmyndighetene trekker også frem viktigheten av god matematikkompetanse på følgende måte:

> As a Nation the development of a highly-skilled and well-educated manpower is critical to support an innovation- and technology-driven economy. A strong grounding in mathematics and a talent pool in mathematics are essential to support the wide range of value – added economic activities and innovations. (Ministry of Education, 2012a).

Dette viser et syn på skolematematikken som et viktig skolefag, og som avgjørende for samfunnets utvikling, både i Norge og i Singapore.

Skolematematikken i Singapore er anerkjent internasjonalt. I USA er Singapore Math et patentert varemerke i undervisningssammenheng, og eierne selger singaporeanske matematikklærebøker i Nord Amerika (Singapore Math Inc., 2011). I henhold til W. S. Tan (2009) er to kjennetegn ved den singaporeanske matematikkundervisningen Model Method og et matematisk rammeverk. Model Method kan beskrives som følger: «The Model Method uses a visual method to represent mathematical quantities and their relationships, and concrete manipulations to represent abstract algebraic functions. » (W. S. Tan, 2009). Det *matematiske rammeverket* har problemløsning i sentrum av undervisningen, og følgende kompetanser vektlegges i rammeverket: «(…) conceptual understanding, skills proficiency and mathematical processes (...)» og «(...) attitudes and metacognition.» (W. S. Tan, 2009).

Matematisk kompetanse defineres på liknende måte av utdanningsmyndighetene i Norge og Singapore. I den singaporeanske læreplanen fremstilles matematisk kompetanse som tilegnelse og anvendelse av matematiske begreper og ferdigheter, og utvikling av kognitive og metakognitive ferdigheter (Ministry of Education, 2012a, s. 9). I henhold til den norske læreplanen innebærer matematisk kompetanse: «(…) å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er.» (Utdanningsdirektoratet, 2013a) I tillegg defineres matematisk kompetanse ut i fra de grunnleggende ferdighetene i norsk skole: muntlige og digitale ferdigheter og å kunne skrive, lese og regne i matematikk.

2.11 Skolesystemene i Norge og Singapore

Skolegangen i Singapore består av seks år med «Primary School», fire år med «Secondary School» og enten to år med «Junior College» (JC), ett til to år med «Institute of Technical Education» (ITE) eller tre år med «Polytechnic» (P) (Y. C. Tan et al., 2012). Elevene starter på «Primary School» i januar det året de fyller syv år. Basert på eksamensresultater fra «Primary School Leaving Examination» begynner elevene på en av følgende tre retninger på «Secondary school»: «Express», «Normal (Academic)» eller «Normal (Technical)» (Y. C. Tan et al., 2012). I 2011 var elevfordelingen henholdsvis 60%, 25% og 15% blant disse studieretningene (Y. C. Tan et al., 2012). Det finnes to ulike nivåer for eksamen etter

«Secondary school»; O-level og N-level. «Normal (Academic)» og «Normal (Technical)» leder opp til N-level eksamen. Elever som følger «Normal (Academic)» og oppnår gode nok resultater på N-level eksamen kan imidlertid velge å gå ett år til på «Secondary School» og deretter ta O-level eksamen (Wong & Lee, 2009). Elever som følger «Express» gjennomfører O-level eksamen etter fire år. «Secondary School» er ikke obligatorisk (Y. C. Tan et al., 2012), men omtrent 99% (H. Aslaksen, personlig kommunikasjon, 13. mai, 2015) fullfører denne skolegangen. Matematikk er et obligatorisk fag for elevene som går på SEC3 og SEC4. På disse trinnene kan elevene i tillegg ta matematikkurset «Additional mathematics» (Y. C. Tan et al., 2012). Tilleggskurset skal forberede elevene til mer avanserte matematikkurs senere i utdanningen.

Skolegangen i Norge består av syv år med barneskole, tre år med ungdomsskole og tre år med videregående skole. Den obligatoriske skolegangen i Norge starter med barneskolen i august det året eleven fyller seks år, og slutter etter ungdomsskolen (Onstad & Grønmo, 2012). Elevene kan deretter velge å gå på videregående skole med ulike studieretninger, noe de fleste elevene velger (Onstad & Grønmo, 2012). Dersom elevene velger studieforberedende retning kan de velge mellom Matematikk 1P og Matematikk 1T. I 2014 valgte 52,2 % av disse elevene Matematikk 1T (Utdanningsdirektoratet, u. å.). Tabell 1 viser hvilke klassetrinn i Norge som tilsvarer hvilke klassetrinn i Singapore, og er basert på informasjon fra Helmer Aslaksen.

Norge	**Singapore**
7 års barneskole	6 års «Primary School»
8. trinn på ungdomsskolen	SEC1 på «Secondary School»
9. trinn på ungdomsskolen	SEC2 på «Secondary School»
10. trinn på ungdomsskolen	SEC3 på «Secondary School»
VG1 på videregående skole	SEC4 på «Secondary School»
VG2 på videregående skole	JC/ITE/P
VG3 på videregående skole	JC/ITE/P
	P

Tabell 1: Sammenheng mellom skolegang i Norge og i Singapore. Utarbeidet med bakgrunn i informasjon fra Helmer Aslaksen.

I Singapore er det læreplaner for hvert skoletrinn, med unntak av en felles læreplan for trinnene SEC3 og SEC4. Den norske læreplanen for matematikk er «(…) organized by groups of grades, and curriculumgoals specify competencies to be attained by the end of Grades 2, 4, 7, 10,11, 12, and 13.» (Onstad & Grønmo, 2012, s. 670) .Lærere og lærebokforfattere får dermed større frihet til å bestemme progresjon i matematikkfaget. I henhold til (Utdanningsdirektoratet, 2014) er dette lite heldig, fordi det vanskeligste stoffet ofte utsettes til slutten av læreboken og undervisningsperioden, og «(…) dermed blir det for liten tid til trening og modning før stoffet tas opp igjen i neste bolk.» (Utdanningsdirektoratet, 2014, s. 13). Det er i tillegg metodefrihet i den norske læreplanen; det betyr at læreplanene sier «(…) minimalt om hvilke metoder lærerne skal bruke i undervisningen.» (Utdanningsdirektoratet, 2014, s. 11). Den norske læreplanen inneholder imidlertid noen generelle forslag til læringsmetoder, som å jobbe praktisk og teoretisk, og variere mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter, i tillegg til ferdighetstrening (Utdanningsdirektoratet, 2013a). Den singaporeanske læreplanen inneholder veiledning for undervisningen, med detaljerte føringer for hvordan elevene skal lære kompetansemålene (Y. C. Tan et al., 2012).

3 Metode

3.1 Metodebeskrivelse

Dette kapitlet inneholder en redegjørelse for metodene i vår masteroppgave og begrunnelser for metodiske valg knyttet til de tre forskningsspørsmålene våre:

1. *Hvordan formidles emnet derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene?*

2. *Hvilket læringsutbytte kan oppgavene i derivasjonskapitlet i de norske og i de singaporeanske lærebøkene gi?*

3. *Hvilke forkunnskaper til derivasjon introduseres i de norske og i de singaporeanske lærebøkene, og på hvilke klassetrinn?*

Innenfor utdanningsforskning er det to hovedtyper av forskningsmetoder; kvantitative og kvalitative metoder. Kvantitative metoder er egnet i studier av kausale forhold og i studier med et stort utvalg av data (Ary, Jacobs, & Sorensen, 2010). Kvalitative metoder egner seg i detaljerte studier av et fenomen og i studier med et lite utvalg av data. En annen forskjell mellom de kvantitative og kvalitative metodene gjelder planlegging og gjennomføring av forskningen. Et forskningsdesign som inneholder kvantitative metoder utvikles før forskningen, mens et forskningsdesign som inneholder kvalitative metoder er mer fleksibelt og kan utvikles underveis i forskningen (Ary et al., 2010). Med bakgrunn i disse hensynene, har vi valgt kvalitativ metode som vår hovedmetode for å besvare forskningsspørsmålene. Vi har i tillegg valgt å benytte oss av noen kvantitative metoder for å besvare enkelte aspekter ved forskningsspørsmålene, spesielt det andre forskningsspørsmålet.

For å analysere lærebøkene kvalitativt har vi valgt å benytte oss av metoden *dokumentanalyse*. Under en dokumentanalyse handler utforsking av teksten både om å se etter det som er skrevet og det som ikke står skrevet (Rapley, 2007). I henhold til Bowen (2009) er dokumentanalyse en iterativ prosess, det vil si en prosess der en gjennomgår dokumentet flere ganger på ulike måter. Prosessen inkluderer overfladiske undersøkelser av dokumentet, som skumlesing, og grundigere undersøkelser, som nøye lesing og tolkning. I en dokumentanalyse kan en både gjennomføre en tematisk analyse og en innholdsanalyse (Bowen, 2009). I en tematisk analyse ser en etter repeterende temaer i datamaterialet. Disse repeterende temaene blir kategoriene som innholdsanalysen tar utgangspunkt i (Fereday & Muir-Cochrane, 2006). I henhold til Bowen (2009) involverer den tematiske analysen en grundig gjennomgang av dataene der kategorier skal konstrueres. Disse kategoriene konstrueres ut fra karakteristikkene til datamaterialet (Bowen, 2009). Den andre delen av dokumentanalysen, *innholdsanalysen*, går ut på å organisere informasjonen i teksten i kategoriene konstruert under den tematiske analysen (Bowen, 2009).

Ary et al. (2010, s. 30) trekker frem at en innholdsanalyse også kan gjennomføres kvantitativt. En slik type undersøkelse innebærer å finne frekvensen av noe spesifikt i en tekst (Ary et al., 2010). Vi har derfor valgt å inkludere noen kvantitative metoder i vår forskning. Vi har talt antallet av de ulike elementer i lærebøkene, som antall eksempler, oppgaver og lignende. I tillegg har vi klassifisert matematikkoppgaver ut i fra hvilken type resonnement som kreves i løsningsprosessen. Kombinasjonen av kvalitative og kvantitative metoder kan gi oss varierte resultater og et dypt og bredt perspektiv på problemstillingen.

3.2 Utvalg

3.2.1 Utvalg av faglige emner

I problemstillingen vår fokuserer vi kun på ett emne i matematikkpensumet, og det er derivasjon. Det er flere grunner til at vi undersøker derivasjon. For det første er derivasjon et viktig emne i flere av matematikkfagene i norsk videregående skole. For det andre er det et emne som består av viktige deler av matematikken fra tidligere klassetrinn, som algebra og funksjoner. Analyse av muligheten til å lære derivasjon blir derfor også en analyse av hvilken mulighet elevene har hatt til å lære de viktige forkunnskapene fra tidligere trinn. For det tredje blir derivasjon ansett som en grunnleggende ferdighet innen matematikken på den videregående skolen i Norge (Solbakken, 2008). For det fjerde viser storskalaundersøkelser, som for eksempel TIMSS 2008, en generell tendens til at norske elever har vanskeligheter med derivasjon (L. S. Grønmo et al., 2010). Eksempelvis viste resultatene fra TIMSS 2008 at kun 22 av 97 3MX-elever svarte riktig på en derivasjonsoppgave med derivering av uttrykket $\frac{4}{\sqrt{3x-4}}$ (L. S. Grønmo et al., 2010). Selv om vi ikke undersøker matematikken i lærebøkene fra 3MX-faget, viser resultatet at mange elever fortsatt sliter med derivasjonsregler i tredje trinn i den videregående skolen i Norge. Dette kan tyde på at utgangspunktet fra VG1 var for dårlig og at elevene hadde lignende problemer med derivasjon på VG1.

Vi har valgt forkunnskapsemnene grenseverdier, stigningstall, vekstfart, algebra og funksjoner. Forkunnskapsemnene er fra åttende trinn og SEC1 og opp til kapitlene rett før derivasjonskapitlet i lærebøkene for VG1 og SEC4. Valget av emner ble tatt ut i fra relevans og viktighet i forhold til matematikken knyttet til derivasjon.

3.2.2 Utvalg av lærebøker

For å besvare problemstillingen har vi valgt å analysere lærebøker. En årsak er at lærebøker kan regnes som *potentially implemented curriculum* (Törnroos, 2005), og studier har vist at matematikklærere bruker lærebøker i stor grad både når de planlegger og når de gjennomfører undervisningen (Okeeffe, 2013). En annen årsak til at vi valgte lærebøker, er at de gir oss informasjon om mulig progresjon av undervisning på ungdomsskolen i Norge og i Secondary School i Singapore. Denne informasjonen gir ikke den norske læreplanen.

Utvalget av lærebøker til analysen er tatt med hensyn til forskningsspørsmålene våre og muligheten til å gå i dybden i forskningen. Ettersom vi skal analysere lærebøkenes fremstilling av kun ett emne, får vi større kapasitet og bedre mulighet til å undersøke et større utvalg av lærebøker. Vi skal undersøke de lærebøkene der derivasjon introduseres, og utvalget vårt er basert på det norske læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T. I tillegg til Matematikk 1T-bøkene for VG1, er matematikklærebøker for Additional Mathematics på SEC3/SEC4 i Singapore med i utvalget vårt. I de singaporeanske lærebøkene har vi valgt det innholdet som dekker derivasjonspensumet i Matematikk 1T i Norge. I tillegg skal vi undersøke lærebøker som inneholder de relevante forkunnskapene til derivasjon. Dette utvalget består i matematikklærebøker fra alle trinnene i ungdomsskolen i Norge og alle trinnene i Secondary School i Singapore.

Det er flere grunner til at vi valgte å sammenligne norske matematikklærebøker med lærebøker fra Singapore. For det første er singaporeanske elever blant de høyest presterende på internasjonale storskalaundersøkelser (Mullis et al., 2011; OECD, 2010). Det er interessant å studere matematikklærebøker i et høytpresterende land. For det andre er de singaporeanske lærebøkene internasjonalt anerkjente, i tillegg til at de er på engelsk som er en nødvendig forutsetning for oss. For det tredje valgte vi lærebøker fra Singapore med bakgrunn i kontakt med vår veileder Helmer Aslaksen. En ulempe med valg av singaporeanske lærebøker er imidlertid at det singaporeanske samfunnet og skolesystemet er relativt ulikt det norske. Det betyr at andre faktorer enn matematikklærebøker påvirker muligheten til å lære. For eksempel kunne valg av finske matematikklærebøker gitt oss bedre muligheter til å sammenlikne muligheten til å lære i de ulike landene, med tanke på større likhetstrekk mellom Norge og Finland. Finske elever oppnår også gode resultater på internasjonale skoleundersøkelser, men disse resultatene er imidlertid ikke like stabile og sterke som i Singapore. Basert på dette, og manglende kjennskap til finsk skolematematikk og manglende finske språkkunnskaper, ble valget å sammenligne norske med singaporeanske lærebøker.

Det er flere forlag som publiserer matematikklærebøker i både Norge og Singapore. For muligheten til å gå i dybden har vi basert utvalget på vårt inntrykk av forlagenes markedsandel i skolen. Det vil si at vi har valgt de lærebøkene som flest elever i Norge og i Singapore bruker. Det er tre matematikklærebøker for ungdomsskolen og tre matematikklærebøker for VG1 som er vanlige å bruke i norske matematikklasserom. I Singapore er det to ledende læreverk for Secondary School på markedet. Derfor sammenligner vi kun to singaporeanske læreverk med de tre norske læreverkene på ungdomsskolen og VG1. Vi har også valgt lærebøkene etter utgivelsesår slik at ungdomsskolebøkene er av eldre utgave enn lærebøkene for VG1. Da kan de samme elevene både ha hatt en av lærebøkene for ungdomskolen i vårt utvalg og en av lærebøkene for den videregående skolen i vårt utvalg. På den måten kan vi få et bedre bilde av hvilken mulighet norske og singaporeanske elever har til å lære derivasjon. I utvalget av lærebøker har vi kun inkludert hovedboken til forlagene og valgt å se bort fra eventuelle oppgavebøker.

På neste side er det en tabell med alle matematikklærebøkene i vårt utvalg. Vi har systematisert lærebøkene etter land og klassetrinn i tabellen. Det er ingen sammenheng mellom valg av lærebøker på ungdomsskolen og den videregående skolen i Norge. Elever i Norge kan bruke hvilket som helst av læreverkene i ungdomsskolen, og deretter hvilket som helst i VG1. Av de følgende tabellene ser vi at lærebøkene NSM3 og NSM4 er henholdsvis 6. og 7. utgave. Med tanke på progresjonsanalysen, der vi skal undersøke progresjon og sammenheng mellom lærebøkene på de ulike trinnene, er det uproblematisk at bøkene er av ulik utgave. Vi har undersøkt de to singaporeanske læreplanene som var gjeldende da 6. og 7. utgave av NSM-lærebøkene ble publisert. For de aktuelle emnene i 6. og 7. utgave er det ingen forskjeller (Ministry of Education, 2006, 2012b)**.** I tabellene har vi gitt enkelte lærebøker med lange titler en forkortelse som vi vil bruke fra nå av.

Utvalg av lærebøker for ungdomsskolen i Norge og SEC1 til SEC3 i Singapore:

	Norge			**Singapore**	
Forlag	Elektronisk Undervisnings-forlag AS	Cappelen Damm	Aschehoug	Shinglee Publishers	Star Publishing Pte Ltd
8.trinn/ SEC1	Grunntall 8 (Bakke & Bakke, 2006a)	Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006a)	Sirkel 8B (Torkildsen & Maugsten, 2006)	New Syllabus Mathematics 1 (*NSM1*) (Yeo, Teh, Loh, Ivy, et al., 2013)	Discovering Mathematics 1A (*DM1A*) (Chow & Ling, 2007a) og Discovering Mathematics 1B (*DM1B*) (Chow & Ling, 2007b)
9.trinn/ SEC2	Grunntall 9 (Bakke & Bakke, 2006b)	Faktor 2 (Hjardar & Pedersen, 2006b)	Sirkel 9B (Torkildsen & Maugsten, 2007)	New Syllabus Mathematics 2 (*NSM2*) (Yeo et al., 2014)	Discovering Mathematics 2A (*DM2A*) (Chow & Ling, 2008a)
10.trinn/ SEC3/ Additional Mathematics	Grunntall 10 (Bakke & Bakke, 2007)	Faktor 3 (Hjardar & Pedersen, 2007)	Sirkel 10A (Torkildsen & Maugsten, 2008a) Sirkel 10B (Torkildsen & Maugsten, 2008b)	New Syllabus Mathematics 3 (*NSM3*) (Teh, Loh, & Yeap, 2007)	Discovering Mathematics 3A (*DM3A*) (Chow & Ling, 2007c)

Tabell 2: Utvalg av lærebøker for ungdomsskolen og SEC1 – SEC3

Utvalg av lærebøker for VG1 i Norge og SEC4 i Singapore:

Forlag	Gyldendal	Cappelen Damm	Aschehoug	Shing Lee Publishers	Star Publishing
VG1/ SEC4/ Additional Mathematics	Sigma 1T (Øgrim et al., 2013)	Sinus 1T (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch, & Hals, 2009)	Matematikk 1T. (*M1T*) (Heir, Engeseth, Moe, & Borgan, 2014)	New Syllabus Mathematics 4 (*NSM4*) (Teh, Loh, Yeo, Ivy, & Yeap, 2008)	Discovering Mathematics 4B (*DM4B*) (Chow & Ling, 2008b)
				Additional Mathematics (*AM*) (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013)	Discovering Additional Mathematics (*DAM*) (Chow & Ling, 2010)

Tabell 3: Utvalg av lærebøker for VG1 og SEC4

3.3 Analyse, prosedyre og gjennomføring

I det følgende er det detaljerte beskrivelser av våre metoder med begrunnelser for hvorfor disse er egnet til å besvare forskningsspørsmålene.

3.3.1 Metode for undersøkelse av det første forskningsspørsmålet

Det første forskningsspørsmålet vårt er: «*Hvordan formidles emnet derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene?*». Dette forskningsspørsmålet ble hovedsakelig undersøkt med kvalitativ dokumentanalyse, men også med kvantitative metoder. Prosedyren for gjennomføring av dokumentanalysen startet med en tematisk analyse. Da skaffet vi oss først et overblikk over innholdet i kapitlene, før vi leste tekstene mer grundig. Med *innholdet* i derivasjonskapitlene mener vi forklaringstekster, illustrasjoner og eksempler. I denne prosessen leste vi også tekstene først hver for oss, og deretter sammenlignet vi observasjoner og så nærmere på tekstene sammen. Til slutt diskuterte vi hva som skulle inkluderes i analysen oss i mellom, og i samarbeid med veiledere.

I den grundige undersøkelsen av derivasjonskapitlene var vi på utkikk etter viktige og repeterende temaer av relevans for det første forskningsspørsmålet. Vi utviklet kategorier i samsvar med disse temaene, både for å systematisere datamaterialet vårt og for å skape et utgangspunkt for diskusjonsdelen. Kategoriene er knyttet til forklaringsmetoder i lærebøkene, hvordan symbol- og begrepsbruken er, i hvilken grad formuleringene er presise, faglig innhold og hvordan lærebøkene kan motivere elevene til læring. Vi organiserte informasjonen i tekstene i kategoriene våre under innholdsanalysen ved å se gjennom tekstene flere ganger. I innholdsanalysen trakk vi i tillegg frem andre interessante aspekter ved innholdet i derivasjonskapitlene. Dokumentanalysen tillater oss å gå i dybden, og ved å studere de ulike kategoriene får vi informasjon om mulighetene elevene har til å lære derivasjon.

Tabellen under viser kategoriene vi konstruerte under den tematiske analysen for undersøkelse av det første forskningsspørsmålet:

Tema	Kategorisering	Forklaring
Motivasjon	*Motiverende element*	Metatekst (beskrivelser av det kommende innholdet), anvendelser, historisk bakgrunn, læreplanmål, kontekstskapende elementer.
	Motiverende begrunnelse	En begrunnelse for hvorfor elevene skal lære det aktuelle emnet.
Matematisk språk	*Upresis formulering*	Inneholder uklarheter som kan føre til misforståelser.
	Bred/manglende bruk av begreper	
	Bred/manglende bruk av symboler	
Forklaring	*Spesifikk til generell*	Forklaringer som tar utgangspunkt i et spesifikt eksempel som senere generaliseres.
	Visualiserende forklaring	Forklaring som skaper et mentalt bilde av matematikken. Det kan være en illustrasjon med markerte symboler og lignende, en forklaringstekst eller en kombinasjon av begge. Vi inkluderer også analogier og konkretiseringer av det abstrakte som gjør at elevene kan visualisere matematikken.
	Aktiv elevrolle	Forklaringer som gir elevene en aktiv rolle gjennom for eksempel utforskende aktiviteter.
	Mer/mindre fullstendig forklaring	En mer fullstendig forklaring inneholder faglige elementer som utdyper forklaringen. En mindre fullstendig forklaring utelater vesentlig faglig innhold.
	Forhindring av mulige misoppfatninger	En forklaring som kan forhindre mulige misoppfatninger og at læreboken påpeker aspekter som kan misforståes av elevene.
	Numeriske eksemplifiseringer	Spesifikke eksempler med numeriske verdier som demonstrerer en regel.
Forståelse	*Instrumentell/ relasjonell forståelse*	Forklaringer og oppgaver som kan fremme instrumentell forståelse, og forklaringer og oppgaver som kan fremme relasjonell forståelse.
Rekkefølge	*Diskutabel rekkefølge*	En rekkefølge av teori eller andre elementer som kan oppfattes som lite hensiktsmessig.

Tabell 4: Kategorier i forbindelse med dokumentanalysen

For å undersøke det første forskningsspørsmålet har vi også analysert strukturen i lærebøkenes derivasjonskapittel kvalitativt. I tillegg benyttet oss av kvantitative metoder. Vi har talt antall matematiske eksempler, matematiske illustrasjoner, estetiske illustrasjoner og antall sider i derivasjonskapitlene. Vi talte hver deloppgave i hver eksempeloppgave som ett isolert eksempel, og talte også eksempler i forklaringsteksten. Matematiske illustrasjoner er alle grafer, tabeller, matematiske figurer og andre bilder med matematisk innhold. Estetiske illustrasjoner er bilder uten matematiske innhold som kun bidrar til estetikken i læreboken.

3.3.2 Metode for undersøkelse av det andre forskningsspørsmålet

Det andre forskningsspørsmålet vårt er: «*Hvilket læringsutbytte kan oppgavene i derivasjonskapitlet i de norske og i de singaporeanske lærebøkene gi?*». For å undersøke dette spørsmålet har vi benyttet oss av både kvantitative og kvalitative metoder. Den kvantitative undersøkelsen av dette forskningsspørsmålet dreier seg i all hovedsak om kategorisering av matematikkoppgaver ut i fra hvilke resonnementer som kreves i løsningsprosessen. For å samle data som kan gi oss denne informasjonen fra derivasjonskapitlene, har vi benyttet oss av rammeverket «A research framework for creative and imitative reasoning», som er utarbeidet av Lithner (2008). Relevansen av vår forskning understrekes av Lithner (2012) som antar at elevenes mulighet til å lære matematikk påvirkes i stor grad av tankeprosessene i forbindelse med løsning av matematikkoppgaver. Videre trekker Lithner (2012) frem at elevers resonnement kan gi oss informasjon om disse tankeprosessene. Vi kan derfor få informasjon om elevenes mulighet til å lære derivasjon ved å finne ut hvilke resonnementer som kreves for å løse de ulike oppgavene.

Vi vurderte også å benytte oss av andre rammeverk, som rammeverket til Niss og Jensen (2002). Dette rammeverket kunne vi brukt til å kategorisere derivasjonsoppgavene i lærebøkene i vårt utvalg etter matematikkompetanser. Basert på begrunnelsene ovenfor mener vi at rammeverket til Lithner (2008) gir oss tilstrekkelig informasjon egnet for våre formål.

Klassifisering med Lithners rammeverk

Som beskrevet i delkapittel 2.5.1, skiller Lithner (2008) mellom kreative og imiterende resonnementer. Et kreativt resonnement (CMR) foregår under løsning av oppgaver uten kjent fremgangsmåte eller der deler av løsningsmåten er ukjent for eleven. Et imiterende resonnement (IR) er derimot knyttet til oppgaver der fremgangsmåten for å løse oppgavene er kjent for elevene. Kategorien imiterende resonnement består både av underkategoriene memorisert resonnement (MR) og algoritmisk resonnement (AR). Et memorisert resonnement går ut på å huske et komplett svar og skrive ned dette. Et algoritmisk resonnement går ut på å huske en kjent algoritme som kan brukes for å løse oppgaven.

I henhold til Palm, Boesen, og Lithner (2011) er det flere hensyn å ta i forbindelse med klassifisering av matematikkoppgaver med Lithners rammeverk. For det første må hver enkelt matematikkoppgave settes i en større sammenheng og kan ikke klassifiseres isolert. Dette innebærer vurderinger av den informasjonen elevene har tilgjengelig og de oppgavene elevene har løst før, for å avgjøre hvilken kategori hver oppgave tilhører. Forskningen til Palm et al. (2011), som vi referer til her, omhandler undersøkelser av nødvendige resonnementer for å løse oppgaver gitt på nasjonale prøver i Sverige. Denne kategoriseringen tok utgangspunkt i elevenes matematikklærebøker. Hensikten var å undersøke hvilke oppgaver elevene har løst før, som grunnlag for hvilke resonnement som kreves i løsning av oppgaver på de nasjonale testene.

For klassifisering av matematikkoppgavene i vår studie har vi benyttet oss av modifikasjoner av Lithners rammeverk fra studien til Hellan (2013). Rammeverket til Lithner ble i den studien tilpasset til kategorisering av oppgaver i matematikklærebøker, og disse modifikasjonene har fått støtte av Lithner selv (Hellan, 2013). Hellan (2013) skiller mellom IR, lokal CMR (LCMR) og global CMR (GCMR) i sin forskning. Imiterende resonnement (IR) består, som nevnt ovenfor, av resonnementstypene MR og AR. Da ingen av oppgavene i vårt utvalg kvalifiserte til MR, er alle oppgavene i kategorien IR av typen AR. I likhet med Hellan (2013), klassifiserte vi en oppgave i IR-kategorien dersom vi fant et matematisk eksempel med en lignende oppgave. I de tilfellene kan elevene følge løsningsmetoden i eksemplet for å få til oppgaven. Dette gjelder også oppgaver der løsningsmetoden står beskrevet i forklaringsteksten i kapitlet. I tillegg har vi kategorisert en oppgave i IR-kategorien dersom løsningsmetoden er gitt i selve oppgaveteksten.

Vi klassifisert også en oppgave i IR-kategorien dersom vi fant en lignende oppgave tidligere i derivasjonskapitlet. Løsning av slike oppgaver krever kun repetisjon av lignende løsningsprosess og samme resonnement som i den tidligere oppgaven. Dette gjør at oppgaver som isolert sett hadde kvalifisert til de kreative resonnementskategoriene, allikevel blir klassifisert som IR. Denne vurderingen har bakgrunn i studien til Palm et al. (2011). Palm et al. (2011) krevde imidlertid at læreboken inneholdt flere lignende oppgaver for at den aktuelle oppgaven skulle klassifiseres som IR. På den måten hadde elevene mulighet til å automatisere den nødvendige ferdigheten. Dette kravet er ikke nødvendig i vårt tilfelle da vi analyserer lærebøkene i stedet for tester, og elevene har arbeidet med de tidligere oppgavene tilgjengelig når de løser oppgavene. Vår vurdering ble derfor at det er tilstrekkelig med kun én tidligere lignende oppgave i læreboken for at oppgaven skal kategoriseres som IR.

I vår studie er en oppgave klassifisert i kategorien LCMR dersom det finnes et lignende eksempel, men minst ett steg i løsningsprosessen er annerledes enn løsningsforslaget i eksemplet. Elevene må derfor resonnere kreativt i minst ett steg av løsningsprosessen. Dersom de fleste stegene i løsningsprosessen er forskjellig fra det lignende eksempelet har vi klassifisert oppgaven som GCMR. Vi har også kategorisert en oppgave i GCMR-kategorien dersom det ikke finnes noe lignende eksempel i læreboken. Skillet mellom LCMR og GCMR har med andre ord med graden av kreativitet i resonnementene å gjøre. Et annet valg vi gjorde var å regne hver deloppgave som én oppgave. Dersom det var flere spørsmål innenfor én deloppgave behandlet vi fortsatt hele deloppgaven som én oppgave. I noen tilfeller tilhørte disse spørsmålene forskjellige resonnementskategorier. Vi klassifiserte da deloppgaven i henhold til det spørsmålet som krevde høyest grad av kreativitet.

Vi delte arbeidet med kategorisering av oppgaver likt oss i mellom. I de tilfellene der vi var usikre på kategoriseringen, diskuterte vi dette med hverandre og med veilederne for flere oppfatninger. Under følger noen eksempler som viser vår refleksjon og vurdering knyttet til klassifisering av enkelte matematikkoppgaver med Lithners rammeverk.

Kategorisering av en oppgave i IR-kategorien

Følgende deloppgave er et eksempel på en oppgave som ble kategorisert som IR: «Deriver disse funksjonene: $a)\ f(x) = 5x$ (...)» (Øgrim et al., 2013, s. 283). Oppgaven er kategorisert som IR fordi elevene kan følge eksemplene under regelen for derivasjon av lineære funksjoner (se Figur 2).

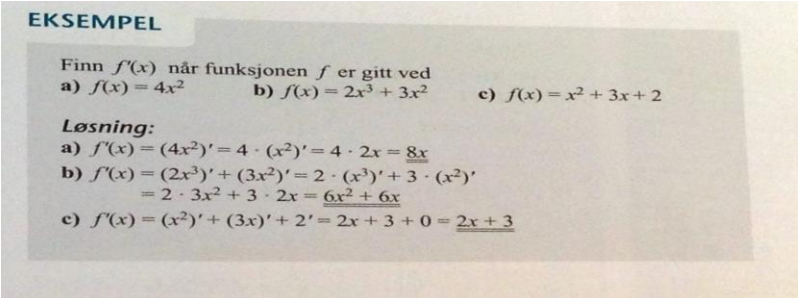
LINEÆR FUNKSJON

$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = 3x$	$f'(x) = 3$
$f(x) = -9x$	$f'(x) = -9$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$

Figur 2: Derivasjonsregelen for lineære funksjoner i Sigma 1T

Kategorisering av oppgaver i LCMR-kategorien

Følgende oppgave er et eksempel på en oppgave som ble kategorisert som LCMR: «Oppgave 8.241b) Deriver funksjonen: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (x-1)^2$» (Oldervoll et al., 2009, s. 371).



EKSEMPEL

Finn $f'(x)$ når funksjonen f er gitt ved

a) $f(x) = 4x^2$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ **c)** $f(x) = x^2 + 3x + 2$

Løsning:

a) $f'(x) = (4x^2)' = 4 \cdot (x^2)' = 4 \cdot 2x = \underline{\underline{8x}}$

b) $f'(x) = (2x^3)' + (3x^2)' = 2 \cdot (x^3)' + 3 \cdot (x^2)'$
$= 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 + 6x}}$

c) $f'(x) = (x^2)' + (3x)' + 2' = 2x + 3 + 0 = \underline{\underline{2x + 3}}$

Figur 3: Eksempel i forbindelse med derivasjon i Sinus 1T

Oppgaven er kategorisert som LCMR fordi fremgangsmåten for deriveringen er i henhold til eksemplene i Figur 3. Ett steg er imidlertid annerledes, og det er at elevene må anvende andre kvadratsetning på leddet $(x-1)^2$ før de deriverer $f(x)$. De må forstå at ledd av typen $(x-1)^2$ generelt ikke kan deriveres med regelen $(x^n)` = n \cdot x^{n-1}$. I dette tilfellet ville en slik overgeneralisering av derivasjon av potenser blitt riktig, men det er kun fordi den deriverte av kjernen er lik 1.

En oppgave som viser en annen begrunnelse for kategorisering i LCMR-kategorien er følgende oppgave fra AM: «Find the minimum value of the sum of a positive number and it's reciprocal.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 392). Denne oppgaven er klassifisert til LCMR fordi elevene må benytte seg av egenskapene til en resiprok for å stille opp uttrykket, og dette begrepet er ikke definert eller nevnt noen andre steder i derivasjonskapitlet. De resterende stegene i løsningsprosedyren er gitt i andre eksempler i læreboken der maksimal- og minimalverdier beregnes og der funksjoner av typen $f(x) = \frac{1}{x}$ deriveres.

Kategorisering av en oppgave i GCMR-kategorien

Følgende oppgave fra M1T er et ble kategorisert som GCMR: «Skisser en mulig graf til en andregradsfunksjon f når du får opplyst at den momentane vekstfarten er 2 når $x = 3$ og at den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[-3,1]$ er lik null.» (Heir et al., 2014, s. 231). Oppgaven er kategorisert som GCMR ettersom det ikke er noen lignende eksempler elevene kan følge. For å løse oppgaven må elevene bruke de iboende matematiske egenskapene ved andregradsfunksjoner og gjennomsnittlig vekstfart for å finne nullpunktet. I tillegg må de bruke egenskapene til momentan vekstfart for å bestemme om funksjonen er konveks eller konkav.

Andre metoder knyttet til det andre forskningsspørsmålet

Den andre kvantitative metoden vi har benyttet oss av i undersøkelsen av det andre forskningsspørsmålet, er telling av antall oppgaver. Vi har talt totalt antall oppgaver i derivasjonskapitlene i lærebøkene for VG1 og Additional Mathemaics i SEC3/SEC4. I tillegg har vi talt antall spesielle typer oppgaver, det vil si oppgaver der elevene oppfordres til refleksjon og oppgaver knyttet til den induktive metoden. Med refleksjonsoppgaver mener vi oppgaver der elevene blir bedt om å forklare svaret, hva de gjorde for å komme fram til svaret eller hvorfor svaret ble som det ble. Med oppgaver knyttet til den induktive metoden, mener vi oppgaver der elevene skal komme fram til en matematisk sammenheng gjennom utforskning og eksperimentering. Vi gjennomførte tellingen i denne kvantitative metoden ved å telle halvparten av oppgavene hver, for så å dobbeltsjekke hverandres telling for å unngå feilkilder.

For å undersøke det andre forskningsspørsmålet med kvalitative metoder, tok vi utgangspunkt i et utvalg av *interessante* oppgaver fra den kvantitative undersøkelsen. Disse oppgavene har spesielle trekk knyttet til elevenes mulighet til å lære derivasjon, og kan i all hovedsak bidra til å øke elevenes relasjonelle forståelse. For det første gjelder dette oppgaver knyttet til den *induktive metoden.* For det andre gjelder dette oppgaver knyttet til *tolkningen av den deriverte*, det vil si oppgaver der som kan gjøre det klarere for elevene at derivasjon brukes til å tilnærme vekstfart. Blant oppgaver med spesielle trekk regner vi også *refleksjonsoppgaver* og oppgaver som oppfordrer til bruk av *flere ulike fremgangsmåter* i løsningsprosessen.

3.3.3 Metode for undersøkelse av det tredje forskningsspørsmålet

Det tredje forskningsspørsmålet vårt er: *«Hvilke forkunnskaper til derivasjon introduseres i de norske og i de singaporeanske lærebøkene, og på hvilke klassetrinn?».* Dette forskningsspørsmålet ble behandlet kvalitativt. For å få informasjon om progresjon og modningsprosess i lærebøkene for de ulike trinnene analyserte vi med antakelsen om at leserne følger kapittelrekkefølgen i bøkene. De ulike forkunnskapsemnene ble analysert på ulike måter. Emnene grenseverdier, stigningstall og vekstfart analyserte vi ved å beskrive faglig innhold, grad av generalitet og i hvilken grad disse ble vektlagt i de ulike lærebøkene. I tillegg undersøkte vi når ulike aspekter ved disse forkunnskapene ble introdusert i lærebøkene. For å analysere forkunnskapene funksjoner og algebra undersøkte vi henholdsvis hvilke funksjonsuttrykk og hvilke faktoriseringsteknikker som ble introdusert i lærebøkene for de ulike trinnene. For å analysere forkunnskapen algebra undersøkte vi også grad av kompleksitet på de rasjonale uttrykkene som skal forenkles på hvert trinn. Alt i alt anser vi dette som et tilstrekkelig mål på hvilket nivå elevene har mulighet til å komme på før de skal lære om derivasjon.

3.4 Validitet og reliabilitet

For at resultatene i vår masteroppgave skal være troverdige og belyse problemstillingen vår på en slik måte at vi kan trekke slutninger i oppgaven, er det nødvendig med fokus på metodebegrepene *reliabilitet* og *validitet.* Vi definerer disse begrepene i henhold til S. Grønmo (2004). *Reliabilitet* omhandler i hvilken grad datamaterialet er pålitelig og troverdig (S. Grønmo, 2004). *Validitet* omhandler «(…) i hvilken grad undersøkelsesopplegget egner seg til å samle inn data som er relevante for problemstillingene i en bestemt studie.» (S. Grønmo, 2004, s. 221). I det følgende beskrives først validitets- og reliabilitetsbegrepene som vi har benyttet oss av i vår vurdering. Deretter bruker vi disse begrepene i begrunnelsen av de vurderingene vi har foretatt oss for å styrke graden av reliabilitet og validitet i forskningen.

Ekvivalens er en type reliabilitet som er aktuell med tanke på at vi er to studenter som samarbeider om masteroppgaven. Denne typen reliabilitet omhandler i hvilken grad det er sammenheng mellom funnene til ulike forskere i samme forskningsprosjekt: «Reliabilitet i form av ekvivalens er høy dersom det er stort samsvar mellom data om samme fenomen som er samlet inn ved hjelp av samme undersøkelsesopplegg, men av ulike personer.» (S. Grønmo, 2004)(sidetall. Side223). I henhold til S. Grønmo (2004) kan lav ekvivalens bety at tendensen i funnene er forårsaket av individuelle forskjeller blant forskerne, noe som er uheldig for forskningen. Et annet aspekt som kan svekke reliabiliteten, er knyttet til begrepet «Biased selectivity» (Bowen, 2009). Dette begrepet omhandler partisk valg av dokumenter.

Under vurdering av *validiteten* i forskningen ønsker vi å benytte oss av flere ulike begreper. Det første er *innholdsvaliditet.* Det er knyttet til kvantitative metoder, og omhandler, i henhold til S. Grønmo (2004), i hvilken grad forskningsmetodene samsvarer med den teoretiske definisjonen av problemstillingen og forskningsspørsmålene. I den forbindelse er det nødvendig med refleksjon rundt operasjonaliseringene av problemstillingen, det vil si hvordan en utformer metoden i praksis for å undersøke problemstillingen. Det andre validitetsbegrepet vi vil trekke frem er *kommunikativ validitet* (S. Grønmo, 2004). Dette dreier seg om samtaler mellom forskere og andre ressurspersoner der sammenhengen mellom datamaterialet og forskningsprosjektets problemstillinger drøftes. I den forbindelse påpeker S.

Grønmo (2004) følgende: «Hvis drøftingene resulterer i enighet eller konsensus om at det ikke foreligger spesielle problemer eller svakheter i forhold til intensjonene med studien, kan validiteten antas å være tilfredsstillende.» (S. Grønmo, 2004, s. 235). Det tredje, og siste, begrepet vi ønsker å benytte oss av i vurderingen av validiteten, er *kompetansevaliditet* (S. Grønmo, 2004). Denne validitetstypen er knyttet til hvor kompetent forskeren er: «Forskerens kompetanse styrker tilliten til at de innsamlede data har god kvalitet og er velegnet til å belyse de aktuelle problemstillingene.» (S. Grønmo, 2004, s. 234).

3.4.1 Vurderinger i forbindelse med utvalget

Valg av *dokumenter* til analysen ble forklart og begrunnet i delkapittel 3.2.2. Bruk av dokumenter i analysen kan styrke *reliabiliteten* til forskningsfunnene på flere måter. For det første er dokumenter en type data som forskeren ikke har produsert selv (Bowen, 2009). Dette er i motsetning til data fra for eksempel observasjonsmetoden, der forskeren noterer ned observasjonene selv, og dermed produserer dataene. Fordelen med dokumenter er at forskeren ikke har påvirket innholdet, og vi har dermed et mer objektivt utgangspunkt. Det betyr at datamaterialet kan undersøkes flere ganger uten at hverken dataene påvirkes eller endres på noen måte. I tillegg betyr dette at datamaterialet enkelt kan etterprøves, og denne muligheten øker reliabiliteten. Det er imidlertid visse aspekter ved valg av dokumenter i metoden vår som kan svekke reliabiliteten. For det første kan et utvalgt være partisk og subjektiv i henhold til definisjonen av «Biased selectivity» (Bowen, 2009). Vi har bevisst forsøkt å redusere dette problemet ved å velge flere bøker fra hvert trinn, i tillegg til å velge de mest brukte bøkene.

I lærebokutvalget vårt har vi flere norske og singaporeanske lærebøker. Med lærebøker fra alle trinn fra åttende trinn til VG1 fra tre ulike forlag i Norge og to ulike forlag i Singapore, har vi et relativt bredt utvalg. Ved å analysere alle de tre norske lærebøkene for Matematikk 1T kan vi få et mer fullstendig bilde av muligheten norske elever får til å lære derivasjon av lærebøkene. Det er likevel viktig at datautvalget er detaljert nok til at vi får den informasjonen vi trenger for et mer fullstendig bilde. Dette er en av grunnene til at vi har begrenset oss til ett matematisk emne. Maxwell (1996) understreker dette på følgende måte: «By "rich" data, I mean data that are detailed and complete enough that they provide a full and revealing picture of what is going on.» (Maxwell, 1996, s. 95). Vurderingene i dette avsnittet er med på å gjøre resultatene våre mer overførbare.

3.4.2 Vurderinger i forbindelse med den kvantitative analysen

I den kvantitative delen av forskningen måler vi *muligheten til å lære* med læringsutbyttet elevene kan få fra å løse matematikkoppgavene i lærebøkenes derivasjonskapittel. Målingene med Lithners rammeverk gir svar på hvordan elevene kan resonnere for å løse matematikkoppgavene i lærebøkene. Denne metoden, og metoden der vi talte totalt antall oppgaver og antall oppgaver med spesielle trekk kan øke innholdsvaliditeten.

Begge de kvantitative metodene har flere fordeler og ulemper knyttet til validitet og reliabilitet som analysemetoder. En ulempe er at begge metodene innebærer opptelling, og dette kan føre til feilaktige resultater. Vi har imidlertid forsøkt å redusere denne feilen ved å dobbeltsjekke hverandres telling. Her drar vi god nytte av å være to som samarbeider om masteroppgaven, og dette bidrar til å styrke reliabiliteten av datamaterialet alt i alt. En fordel knyttet til de kvantitative metodene er at resultatene er data som gir oss et tydelig og konkret sammenligningsgrunnlag for de ulike lærebøkene. Dette kan øke reliabiliteten av funnene våre fra hele analysen totalt sett, ettersom de kan påpeke forskjeller mellom lærebøkene i større grad enn funn fra kvalitativ analyse.

Kategorisering med Lithners rammeverk er komplisert og krever refleksjon rundt kravene for de ulike kategoriene. Selve rammeverket er ferdigutviklet og har vært brukt i tidligere forskning, blant annet i forskningen til Palm et al. (2011), Hellan (2013) og Bergqvist (2007). Dette styrker validiteten. Vi har hentet inspirasjon fra de nevnte forskningsprosjektene og reflektert rundt forskernes erfaringer med bruk av rammeverket. Modifiseringene våre av rammeverket er resultat av nøye diskusjon oss imellom og med veilederne. Dette bidrar til å øke den *kommunikative validiteten* (S. Grønmo, 2004). Vi kategoriserte halvparten av matematikkoppgavene hver, og la til slutt sammen alle funnene til én statistisk oversikt. For å sikre god nok sammenheng mellom resultatene fra hver vår kategorisering, valgte vi ut 100 matematikkoppgaver som vi kategoriserte uavhengig av hverandre som en test. Testen viste at vi kategoriserte 97 % av oppgavene likt. Dette styrker reliabiliteten vår ved at vi har oppnådd *ekvivalens* med en relativt god sammenheng mellom kategoriseringene (S. Grønmo, 2004). Ekvivalensen styrkes også av at vi diskuterte de tilfellene der vi var i tvil om hvilken kategori oppgavene tilhørte. Det betyr at vi får større rom for å trekke slutninger basert på de kvantitative funnene totalt sett. Reliabiliteten kan også styrkes med de konkrete kategoriseringseksemplene som vi trakk frem under «Klassifisering med Lithners rammeverk» i delkapittel 3.3.2. Der beskrev vi refleksjon og vurderinger knyttet til kategorisering av noen spesifikke oppgaver.

3.4.3 Vurderinger i forbindelse med den kvalitative analysen

Felles for alle de kvalitative metodene vi har gjennomført er at de styrker *kommunikativ validitet, kompetansevaliditeten* og *ekvivalens*. Under gjennomføringen av alle de kvalitative metodene har vi først analysert tekstene og oppgavene hver for oss og notert de viktigste punktene og observasjonene vi vil trekke frem i analysen. Deretter har vi diskutert de momentene vi var uenige om, både oss to imellom og sammen med veilederne, for å komme frem til hva vi vil trekke frem og påpeke i den kvalitative analysen. Ved å sammenligne våre tanker om tekstene, for så å diskutere de, har vi styrket den *kommunikative validiteten*, og på den måten økt graden av *ekvivalens*.

Med tanke på de kvalitative metodene vi har gjennomført påpeker Cohen, Manion, og Morrison (2011) at dokumentanalyse avhenger av konteksten. Sosiale, politiske og kulturelle aspekter kan ha noe å si for dokumentet og analysen av dette. Som tidligere nevnt er det forskjeller mellom de norske og singaporeanske samfunnene og skolesystemene som kan påvirke elevenes mulighet til å lære. I vår forskning unngår vi imidlertid dette problemet ettersom vi undersøker muligheten lærebøkene gir til å lære elevene derivasjon.

Av plass- og tidshensyn har vi ikke hatt mulighet til å trekke frem alle aspekter ved lærebøkene. Vi har i den forbindelse brukt egen og veiledernes matematiske og matematikkdidaktiske kompetanse, noe som bidrar til økt *kompetansevaliditet* (S. Grønmo, 2004). Gjennomføring av dokumentanalyse kan bli subjektiv og vise et feilaktig bilde av lærebøkene ved at vi for eksempel kan ha utelatt noen momenter som burde være med. Med kontinuerlige diskusjoner oss to imellom, og med veilederne, har vi imidlertid forsøkt å redusere faren for subjektivitet i dokumentanalysen. På den måten har vi bedret grunnlaget for en mer rettferdig sammenligning av lærebøkene. S. Grønmo (2004) påpeker i den forbindelse hva som er viktigst å fokusere på for å sikre høyest mulig validitet i bruk av kvalitative metoder: «Den viktigste framgangsmåten for å vurdere validiteten er å foreta systematiske og kritiske drøftinger av undersøkelsesopplegget, datainnsamlingen og datamaterialet med vekt på de validitetstypene som er mest relevante for den aktuelle studien, (…).» (S. Grønmo, 2004, s. 237).

4 Analyse

Dette kapitlet inneholder funn fra kvantitativ og kvalitativ analyse. Se vedlegg nummer 1 og 2 for oversikt over hvilke lærebøker som tilhører hvilke land, samt forkortelser for lærebøkene.

4.1 Kvantitativ analyse

Dette delkapitlet inneholder funn fra den kvantitative analysen av oppgavene i derivasjonskapitlet, samt nøkkeltall knyttet til strukturen i lærebøkene.

4.1.1 Fordeling av resonnementer blant matematikkoppgavene

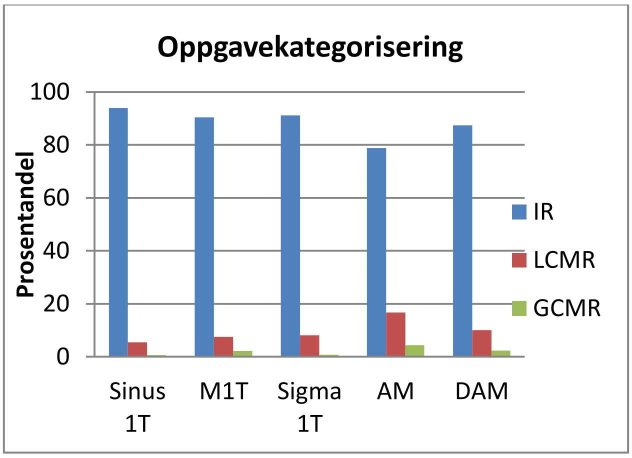
I det følgende presenteres funn fra analysen av matematikkoppgaver med Lithners rammeverk. Tabell 5 og Tabell 6 viser fordeling av kategoriene IR, LCMR og GCMR (se delkapitel 3.3.2) blant matematikkoppgavene i lærebøkene, henholdsvis i antall oppgaver og som prosentandel. Fordelingen i prosent er også presentert i Figur 4.

Lærebok	IR	LCMR	GCMR	Totalt
Sinus 1T	306	18	2	326
Sigma 1T	383	34	2	419
M1T	253	21	6	280
AM	160	34	9	203
DAM	153	18	4	175

Tabell 5: Fordeling av IR, LCMR og GCMR blant oppgavene i matematikklærebøkene

Lærebok	IR	LCMR	GCMR
Sinus 1T	93,87 %	5,52 %	0,61 %
M1T	90,36 %	7,50 %	2,14 %
Sigma 1T	91,19 %	8,10 %	0,71 %
AM	78,82 %	16,75 %	4,43 %
DAM	87,43 %	10,00 %	2,29 %

Tabell 6: Prosentvis fordeling av IR, LCMR og GCMR blant oppgavene i matematikklærebøkene

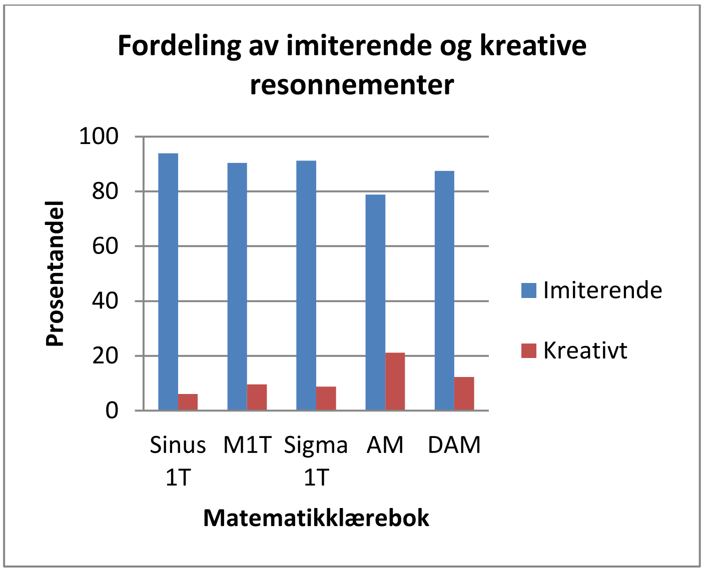


Figur 4: Prosentvis fordeling av IR, LCMR og GCMR blant oppgavene i matematikklærebøkene

Tabell 7 og Figur 5 viser prosentvis fordeling av oppgaver som krever imiterende (IR) og kreativt (LCMR og GCMR) resonnement.

Lærebok	Imiterende	Kreativ
Sinus 1T	93,87%	6,13%
M1T	90,36%	9,64%
Sigma 1T	91,19%	8,81%
AM	78,82%	21,18%
DAM	87,43%	12,29%

Tabell 7: Prosentvis fordeling av imiterende og kreative resonnementer blant oppgavene i matematikklærebøkene

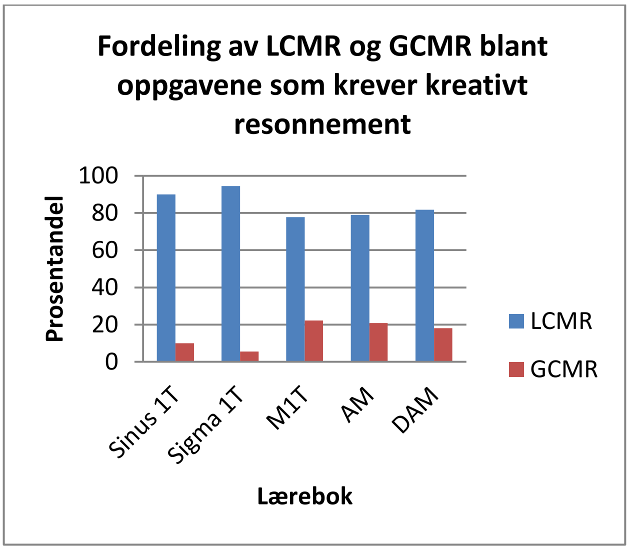


Figur 5: Prosentvis fordeling av imiterende og kreative resonnementer blant oppgavene i matematikklærebøkene

Tabell 8 og Figur 6 viser prosentvis fordeling av LCMR og GCMR blant oppgavene som krever kreativt resonnement i matematikklærebøkene.

Lærebok	LCMR	GCMR
Sinus 1T	90,00%	10,00%
Sigma 1T	94,44%	5,56%
Aschehoug	77,78%	22,22%
AM	79,07%	20,93%
DAM	81,82 %	18,18%

Tabell 8: Prosentvis fordeling av LCMR og GCMR blant oppgavene som krever kreativt resonnement i matematikklærebøkene



Figur 6: Prosentvis fordeling av LCMR og GCMR blant oppgavene som krever kreativt resonnement i matematikklærebøkene

4.1.2 Kvantitativ analyse av refleksjonsoppgaver og oppgaver knyttet til den induktive metoden

Tabell 9 viser antall refleksjonsoppgaver og antall oppgaver tilknyttet den induktive metoden i de ulike matematikklærebøkene.

Oppgavetype/Lærebok	Sinus 1T	M1T	Sigma 1T	AM	DAM
Antall refleksjonsoppgaver	3	40	22	4	1
Antall oppgaver knyttet til den induktive metoden	4	0	0	5	2

Tabell 9: Fordeling av antall oppgaver der elevene får mulighet til å reflektere rundt matematikken og oppgaver som er knyttet til den induktive metoden

Kommentarer til de kvantitative funnene

Tabell 5 viser at de singaporeanske lærebøkene har flere oppgaver som krever løsning med bruk av kreative resonnementer. Andelen oppgaver som må løses med kreative resonnementer i de norske lærebøkene er noe lavere, og M1T har størst andel blant de norske lærebøkene. I tillegg er det størst andel oppgaver som krever GCMR i de singaporeanske lærebøkene og størst andel oppgaver som krever LCMR i de norske lærebøkene innenfor fordelingen av de kreative resonnementene (se Figur 6).

Tabell 5 gir oss også informasjon om fordeling av antall oppgaver i derivasjonskapitlene i de ulike bøkene. Vi observerer at Sigma 1T har flest oppgaver og M1T har færrest. Lærebøkene fra Singapore har tilsynelatende færre oppgaver i derivasjonskapitlet. Dette antallet inkluderer kun oppgaver relatert til det norske læreplanmålet for derivasjon. Når vi regner med alle oppgavene i hele derivasjonskapitlet i DAM og AM, er det henholdsvis totalt 287 og 398 oppgaver. Fordelingen av IR, LCMR og GCMR kunne vært annerledes dersom vi hadde inkludert alle oppgavene. Vi har imidlertid studert de utelatte oppgavene og observert en liknende tendens i fordelingen av resonnementstypene som blant oppgavene vi har talt med. Tabell 9 gir informasjon om antall refleksjonsoppgaver og antall oppgaver tilknyttet induktiv metode i lærebøkene. Denne viser at Sinus 1T, DAM og AM har færrest refleksjonsoppgaver, men flest oppgaver knyttet til den induktive metoden. Denne tendensen er omvendt i M1T og Sigma 1T.

4.1.3 Nøkkeltall fra kvantitativ strukturanalyse

Tabell 10 viser antall matematiske og estetiske illustrasjoner, antall sider, gjennomsnittlig antall bilder per side og antall eksempler i derivasjonskapitlene i matematikklærebøkene.

	Sinus 1T	M1T	Sigma 1T	AM	DAM
Antall matematiske illustrasjoner	32	86	91	61	64
Antall estetiske illustrasjoner	9	10	6	13	3
Antall sider	29	49	27	42	44
Gjennomsnittlig antall bilder per side	1,41	1,96	3,59	1,76	1,52
Antall eksempler	35	40	46	21	32

Tabell 10: Antall illustrasjoner, eksempler og sider i derivasjonskapitlet i matematikklærebøkene.

Tabell 10 viser at Sigma 1T har i gjennomsnitt flest antall bilder per side og flest antall eksempler i derivasjonskapitlet sammenlignet med de andre lærebøkene. Sinus 1T har færrest bilder og AM har færrest eksempler. Alle lærebøkene har flest bilder som illustrerer matematikken, og relativt få bilder som kun bidrar til estetikken.

4.2 Kvalitativ analyse

Dette delkapitlet inneholder kvalitativ analyse av læreplanmålet for derivasjon i Singapore og Norge, samt analyse av struktur, innhold og oppgaver i lærebøkenes derivasjonskapittel. I tillegg inneholder det kvalitativ analyse av forkunnskapene til derivasjon fra åttende trinn til VG1 i Norge og fra SEC1 til SEC4 i Singapore.

4.2.1 Analyse av læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T i Norge og Additional Mathematics for SEC3/SEC4 i Singapore

Det norske læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T er som følger: «Mål for opplæringa er at eleven skal kunne (…) gjere greie for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar og bruke denne regelen til å drøfte funksjonar» (Utdanningsdirektoratet, 2013b). Det singaporeanske læreplanmålet for derivasjon i Additional Mathematics presenteres i Figur 7.

Content	Learning Experiences
CALCULUS	**Students should have opportunities to:**
C1 Differentiation and integration	
1.1 Derivative of $f(x)$ as the gradient of the tangent to the graph of $y = f(x)$ at a point	(a) Relate the derivative of a function to the gradient of the tangent to a curve at a given point, including horizontal and vertical tangents.
1.2 Derivative as rate of change	(b) Distinguish between constant, average and instantaneous rate of change with reference to graphs.
1.3 Use of standard notations $f'(x), f''(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}[=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})]$	(c) Relate the sign of the first derivative of a function to the behaviour of the function (increasing or decreasing), locate points on the graph where the derivative is zero, and describe the behaviour of the function before, at and after these points. (d) Discuss cases where the second derivative test to discriminate between maxima and minima fails (e.g. $y = x^3$, $y = x^4$) and instead, use the first derivative test.
1.4 Derivatives of x^n, for any rational n, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, and $\ln x$, together with constant multiples, sums and differences	(e) Discuss examples of problems in real-world contexts (e.g. business and sciences), involving the use of differentiation. (f) Explain what $\frac{d}{dx}(f(x))$, $\int f(x)dx$ and $\int_a^b f(x)dx$ represent and make connections between • derivative and indefinite integral; • definite and indefinite integrals.
1.5 Derivatives of products and quotients of functions	
1.6 Derivatives of composite functions	(g) Relate the area bounded by a curve and the y-axis to the area under the curve.
1.7 Increasing and decreasing functions	(h) Model the motion of a particle in a straight line, using displacement, velocity and acceleration as vectors (e.g. velocity in the positive direction of x-axis is positive),
1.8 Stationary points (maximum and minimum turning points and	
Content	**Learning Experiences**
CALCULUS	**Students should have opportunities to:**
stationary points of inflexion)	and explain the physical meanings of $\frac{ds}{dt}$ and $\frac{dv}{dt}$, and their signs in relation to the motion.
1.9 Use of second derivative test to discriminate between maxima and minima	
1.10 Apply differentiation to gradients, tangents and normals, connected rates of change and maxima and minima problems	

Figur 7: Målet for derivasjon i læreplanen for Additional Mathematics i Singapore. Hentet fra (Ministry of Education, 2012a)

Figur 7 viser at det singaporeanske læreplanmålet for undervisning av derivasjon er spesifisert på et mer detaljert nivå enn det norske læreplanmålet. I det singaporeanske læreplanmålet er det beskrivelser av hva elevene bør få mulighet til å gjøre i undervisningen for å lære seg derivasjon. I tillegg er det bred bruk av matematiske symboler og faglige begreper i det singaporeanske læreplanmålet. For eksempel spesifiseres det at elevene skal lære begrepene topp-, bunn- og terrassepunkt. Alt dette er manglende i det norske læreplanmålet. I det norske læreplanmålet er det imidlertid spesifisert at elevene skal arbeide med grenseverdidefinisjonen av den deriverte, og dette spesifiseres ikke i det singaporeanske læreplanmålet.

4.2.2 Kvalitativ analyse av lærebøkenes struktur

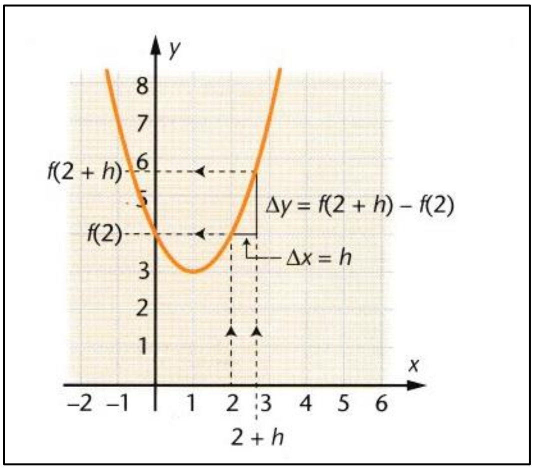
I alle lærebøkene kan en typisk side bestå av elementene tekst, oppgaver, eksempler og illustrasjoner. I DAM og AM er det sider som kun inneholder induktive oppgaver, og Sinus 1T er den eneste læreboken der enkelte sider kun består av sammenhengende tekst. Sammenhengende tekst består i alle lærebøkene av ord, matematiske symboler og utregninger. Faglige begreper utheves med annen skriftstil eller farge i alle lærebøkene, med unntak av Sigma 1T. Alle lærebøkene har flere ulike fargede felter der viktige regler og definisjoner presenteres, og som bryter opp den sammenhengende teksten. I tillegg til de fargede feltene, gir de mange illustrasjonene i lærebøkene et mer fargerikt. Det er minst fargerikt preg i Sinus 1T og mest fargerikt preg i Sigma 1T. I Sigma 1T er det felter i ulike størrelser og med ulike farger ved siden av og under hverandre. Hvert delkapittel i Sigma 1T er på to sider, tettpakket med slike felt. Sigma 1T er også unik i vårt utvalg som eneste bok med læringsmål i hvert eneste delkapittel. Sinus 1T, DAM, AM og M1T har ulike symboler i margen som gir informasjon om innhold i lærestoffet. Et eksempel er et symbol med et utropstegn for viktig informasjon i teksten i Sinus 1T. Alle lærebøkene har delkapitler med overskrift, men det er kun M1T, DAM og AM som har underoverskrifter i delkapitlene også. Kapitlene i alle lærebøker avsluttes med et sammendrag av det viktigste innholdet.

4.2.3 Kvalitativ analyse av innholdet i derivasjonskapitlet

I denne delen av analysen er det beskrivelser av innholdet i derivasjonskapitlet i lærebøkene i vårt utvalg. Det er en analyse av *forklaringen av derivasjonsbegrepet*, *fremstilling av derivasjonsregler*, *forklaring av funksjonsdrøfting* og *praktiske eksempler knyttet til funksjonsdrøfting*. I det følgende står kategoriene fra den tematiske analysen i kursiv (se Tabell 4 side 31 for forklaring av hver kategori).

Innholdet i derivasjonskapitlet den norske læreboken Sinus 1T

Hovedinnledningen til derivasjonskapitlet inneholder kun det relevante læreplanmålet for derivasjon, og består derfor av ett *motiverende element*. *Forklaringen av derivasjonsbegrepet* innledes så med repetisjon av gjennomsnittlig vekstfart, samt en kommentar om at elevene lærte å finne momentan vekstfart digitalt og grafisk i et tidligere kapittel. I tillegg kommenteres det at elevene skal: «(…) lære å finne den momentane vekstfarten i et punkt ved regning.» (Oldervoll et al., 2009, s. 211). Sentralt i lærebokens *forklaring av derivasjonsbegrepet* er *grenseverdidefinisjonen av den deriverte* (se delkapittel 2.9), og vi kategoriserer derfor denne forklaringen som en *mer fullstendig forklaring.* Forklaringen tar utgangspunkt i funksjonen $f(x) = x^2 - 2x + 4$, med mål om å finne grensen av gjennomsnittlig vekstfart i intervallet $[2,2 + h]$, når h går mot null. Utledningen er illustrert med en graf med beskrivende symboler (se Figur 8). I forklaringen står følgende: «Så lar vi h nærme seg null. Intervallet $[2,2 + h]$ vil da krympe og etter hvert bare inneholde punktet $x = 2$.» (Oldervoll et al., 2009, s. 211). Kombinasjonen av denne forklaringsteksten og illustrasjonene i Figur 8 utgjør en *visualiserende forklaring.* Videre i teksten beregnes uttrykket $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.



Figur 8: Illustrasjon i forbindelse med utledningen av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Hentet fra Sinus 1T.

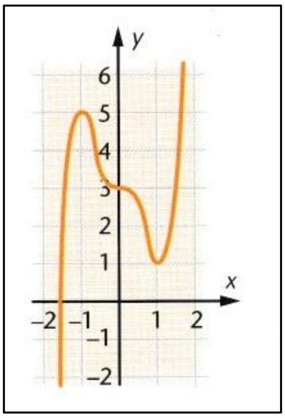
Etter utledningen basert på et spesifikt eksempel forklares definisjonen av den deriverte for en generell funksjon i et vilkårlig punkt $x = a$. I den forbindelse påpekes det at elevene tidligere har lært at vekstfarten i et punkt er lik stigningstallet til tangenten i det punktet. Det viktigste om derivasjonsbegrepet oppsummeres til slutt i et uthevet felt: «Den deriverte til en funksjon f for $x = a$ er gitt ved $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. $f'(a)$ gir vekstfarten i punktet $x = a$ og i tillegg stigningstallet til tangenten i punktet $(a, f(a))$.» (Oldervoll et al., 2009, s. 212). Forklaringen der derivasjonsbegrepet innføres er en *spesifikk til generell forklaring.*

Gjennomgangen av *derivasjonsregler* innledes med følgende om $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ og begrepet *deriverbarhet*: «Grenseverdien ovenfor eksisterer ikke alltid for alle verdier av x. Vi sier at *f* er *deriverbar* i punktet $x = a$ hvis grenseverdien eksisterer når $x = a$.» (Oldervoll et al., 2009, s. 215). Det er kun i Sinus 1T at dette begrepet trekkes inn, og det bidrar til en *bredere begrepsbruk.* Forklaringen av begrepet er imidlertid en *mindre fullstendig forklaring* da det ikke presiseres når grenseverdien eksisterer og ikke eksisterer. I introduksjonen av derivasjonsreglene refereres det til grenseverdidefinisjonen av den deriverte ved at det er «(…) tidkrevende å regne ut slike grenseverdier.» (Oldervoll et al., 2009, s. 215). Vi anser dette som en *motiverende begrunnelse,* fordi behovet for å lære derivasjonsregler tydeliggjøres. Den første derivasjonsregelen som forklares er $(ax + b)' =$

a. I den forbindelse omtales grafen til lineære funksjoner som en «rett linje», og begrepet «lineær» nevnes ikke. Dette vil vi klassifisere som *manglende begrepsbruk.* Forklaringen av derivasjonsregelen starter med beregning av stigningstallet til en spesifikk lineær funksjon ved hjelp av grafen. Deretter utledes derivasjonsregelen for en generell funksjon$f(x) = ax + b$ med grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Her har vi en *spesifikk til generell forklaring*, og en forklaring som kan øke både *instrumentell forståelse* og *relasjonell forståelse.*

Regelen for derivasjon av konstante funksjoner presenteres deretter: «Hvis $f(x) = c$, der c er en konstant så er $f'(x) = 0$.» (Oldervoll et al., 2009, s. 216). Denne utledes ved hjelp av regelen for derivasjon av lineære funksjoner anvendt på et spesifikt eksempel: «Funksjonen $f(x) = 5$ kan vi skrive som $f(x) = 0 \cdot x + 5$. Da er $f'(x) = (0 \cdot x + 5) = 0$.» (Oldervoll et al., 2009, s. 216). Her er det kun *forklaring som kan øke instrumentell forståelse*, da det ikke forklares at det er nullvekst overalt slik det forklares i de andre lærebøkene. Videre utledes regelen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ ved bruk av grenseverdidefinisjonen av den deriverte på den spesifikke funksjonen $f(x) = x^2$ i et vilkårlig punkt x. De to siste derivasjonsreglene, $\big(k \cdot u(x)\big)' = k \cdot u'(x)$ og $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$, utledes ikke, men trekkes frem i oppgaver knyttet til den *induktive metode* i delkapitlet før de presenteres. Her har vi dermed en forklaring med en *aktiv elevrolle.* Dette omtaler vi nærmere i delkapittel 4.2.4.

Forklaringen av *funksjonsdrøfting* innledes med spesifikke eksempler. Først presenteres grafen til $f(x) = x^2 - 4x + 5$ med tangenter gjennom ett punkt på hver side av bunnpunktet, og en tilhørende tekst som beskriver sammenhengen mellom fortegnet til tangentenes stigningstall og grafens øking og minking. Den generelle definisjonen av funksjonsdrøfting presenteres som følger: « *f* vokser i et område hvis og bare hvis $f\ '(x) > 0$ i området. *f* minker i et område hvis og bare hvis $f\ '(x) < 0$ i området.» (Oldervoll et al., 2009, s. 224). Dette klassifiserer vi både som en *spesifikk* til *generell forklaring* og som en *visualiserende forklaring.*



Figur 9:Illustrasjon i forbindelse med forklaring av stasjonære punkter. Hentet fra Sinus1T.

Videre omtales stasjonære punkter, og de beskrives blant annet slik: «I et stasjonært punkt er tangenten alltid horisontal, og punktet vil som oftest være et toppunkt eller et bunnpunkt.» (Oldervoll et al., 2009, s. 224). Forklaringen av de stasjonære punktene er *visualiserende forklaring* da de illustreres av en graf med et toppunkt, et terrassepunkt og et bunnpunkt (se Figur 9). I denne forbindelse er det også *manglende begrepsbruk* da begrepet terrassepunkt ikke nevnes i boken i det hele tatt.

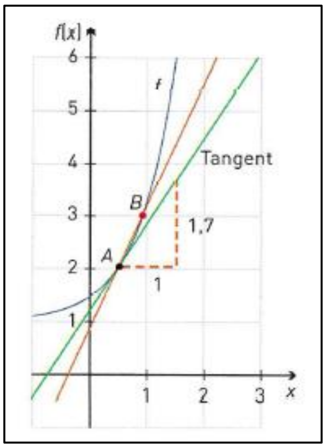
Det beskrives imidlertid følgende om terrassepunkter: «Punktet $x = 0$ er verken et toppunkt eller et bunnpunkt. Funksjonen minker på begge sidene av $x = 0$, og $f'(x)$ er dermed negativ på begge sidene av punktet.» (Oldervoll et al., 2009, s. 224). Følgende definisjon av stasjonære punkter utheves til slutt i et farget felt: «I et stasjonært punkt er $f'(x) = 0$. Det stasjonære punktet er et toppunkt eller bunnpunkt hvis $f'(x)$ skifter fortegn i punktet.» (Oldervoll et al., 2009, s. 224).

Forklaringen av funksjonsdrøfting fortsetter med beskrivelser av fortegnslinjer med spesifikke eksempler. Her er det eksempler med forklaring som kan øke *instrumentell forståelse.* I den forbindelse pekes det igjen på terrassepunkter, også denne gangen uten at begrepet nevnes: «Det er helt nødvendig å lage fortegnslinje for den deriverte når vi skal finne ut om et stasjonært punkt er et toppunkt eller et bunnpunkt, for noen ganger er et stasjonært punkt verken toppunkt eller bunnpunkt.» (Oldervoll et al., 2009, s. 229). I denne forklaringen er det et eksempel med en graf der vi observerer et terrassepunkt, og det konkluderes med følgende i den forbindelse: «Grafen har en horisontal tangent i punktet $(1,2)$, men punktet er likevel ikke noe toppunkt eller bunnpunkt.» (Oldervoll et al., 2009, s. 229).

Forklaringen av *praktiske eksempler knyttet til funksjonsdrøfting* innledes med følgende kommentar som knytter inn teori om funksjonsdrøfting: «Noen ganger bruker vi den deriverte til å finne den største eller den minste verdien til en størrelse.» (Oldervoll et al., 2009, s. 230). I tillegg påpekes det her flere ulike praktiske eksempler, slik som: «(…) å finne ut hvor mange enheter vi skal produsere for å få størst mulig overskudd.» (Oldervoll et al., 2009, s. 230) og «(…) å finne det største arealet av et område når vi har en begrensning på sidene til området.» (Oldervoll et al., 2009, s. 230). Med slike praktiske anvendelser har vi her et *motiverende element.* Begrepet *optimering* trekkes også frem i denne innledningen, og det bidrar til *bredere begrepsbruk.* Dette begrepet defineres slik: «Å finne den verdien av en variabel som gir best resultat, kaller vi *optimering*» (Oldervoll et al., 2009, s. 230). Her har vi en *mindre fullstendig forklaring*, da formuleringen «best resultat» ikke er tilstrekkelig for definisjonen av begrepet optimering. I den videre forklaringen er det eksempler og oppgaver der en skal finne største verdi eller minste verdi i realistiske situasjoner som temperaturmåling, steinkast, antall dyr i en dyrebestand og volum- og arealproblemer. Alle disse eksemplene anser vi som *motiverende elementer* ettersom de er rettet mot praktiske anvendelser.

Innholdet i derivasjonskapitlet i den norske læreboken M1T

De innledende sidene til derivasjonskapitlet består av et bilde av et fossefall. Ellers er det ingen andre *motiverende elementer* i innledningen, heller ikke læreplanmål. *Forklaringen av derivasjonsbegrepet* innledes med et delkapittel om momentan vekstfart, og der beskrives følgende: «I mange sammenhenger er vi interessert i å finne vekstfarten for en bestemt x-verdi, det vil si vekstfarten i et bestemt punkt på grafen.» (Heir et al., 2014, s. 226). Videre forklares det at en ikke kan beregne den gjennomsnittlige vekstfarten for å finne vekstfart i ett punkt, fordi den typen vekstfart gjelder for et intervall. En slik forklaring gir en *motiverende begrunnelse* for hvorfor det er nødvendig å lære om momentan vekstfart og derivasjon. Forklaringen av momentan vekstfart er en *visualiserende forklaring*, fordi den tar utgangspunkt i illustrasjonen vist i Figur 10 og følgende beskrivelse: «(…) hvis vi tenker oss at punktet B kommer nærmere A, vil stigningstallet for den røde linja være et godt mål for hvor bratt grafen er i punktet A.» (Heir et al., 2014, s. 226). I tillegg kommenteres det at:

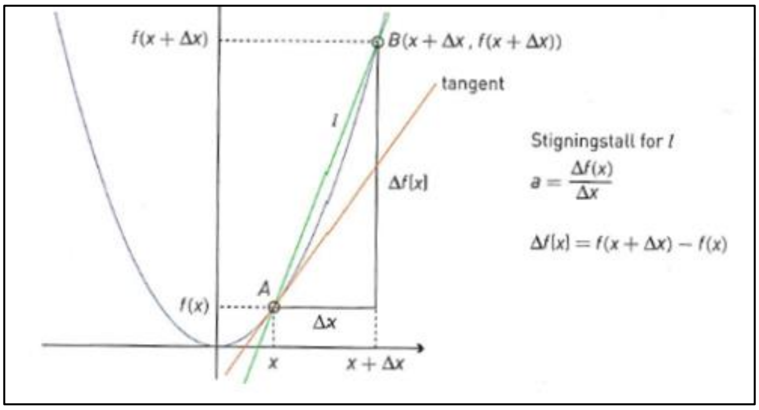


Figur 10: Illustrasjon i forbindelse med forklaringen av momentan vekstfart. Hentet fra M1T.

> Vi ser også at når B kommer nærmere A, vil den røde linja nærme seg den grønne linja som berører grafen i punktet A. En slik linje som berører grafen i et punkt, kaller vi *tangenten* til grafen i punktet. (Heir et al., 2014, s. 226).

Derivasjonsbegrepet trekkes frem i det neste delkapitlet som innledes på følgende måte: «I dette underkapitlet skal vi lære å finne eksakte verdier for momentan vekstfart ved regning. Da er det vanlig å kalle den momentane vekstfarten i et punkt for *den deriverte* i dette punktet.» (Heir et al., 2014, s. 232). Bruken av uttrykket «det er vanlig» i denne formuleringen kan gjøre det uklart for elevene at momentan vekstfart og derivasjon er det samme. Det neste som presenteres er symbolet for den deriverte; $f'(x)$. Avslutningsvis i denne delen fremheves følgende i et uthevet felt: «Den deriverte av en funksjon f for en bestemt x-verdi er stigningstallet for tangenten i punktet med denne x-verdien.» (Heir et al., 2014, s. 232). Denne forklaringen kan øke *relasjonell forståelse,* fordi derivasjonsbegrepet relateres til den grafiske tolkningen av den deriverte. Forklaring av derivasjonsbegrepet er imidlertid en *mindre fullstendig forklaring* ettersom grenseverdidefinisjonen av den deriverte ikke er med i innføringen av derivasjonsbegrepet.

Grenseverdidefinisjonen av den deriverte presenteres først helt til slutt i derivasjonskapitlet, flere delkapitler etter at derivasjonsbegrepet introduseres. Dette anser vi derfor som en *diskutabel rekkefølge.* Fremstillingen av definisjonen innledes med følgende: «Vi skal finne et uttrykk for den deriverte til en annengradsfunksjon, for eksempel $f(x) = x^2$, ved å bruke den algebraiske definisjonen av den deriverte.» (Heir et al., 2014, s. 264). Den videre forklaringen og utledningen av selve definisjonen blir uklar fordi definisjonen av den deriverte benyttes før den er presentert. Forklaringen blir dermed totalt sett en *mindre fullstendig forklaring.* I forklaringen bemerkes det også at: «Vi minner om at Δx står for en endring i x. Δx er altså et tall.» (Heir et al., 2014, s. 264). Videre kommer selve utledningen: «(…) å utlede den deriverte er det samme som å finne et uttrykk for stigningstallet til tangenten i et punkt med x som førstekoordinat.» (Heir et al., 2014, s. 264). Figur 11 illustrerer denne tankegangen, og forklaringen klassifiseres dermed som en *visualiserende forklaring*.

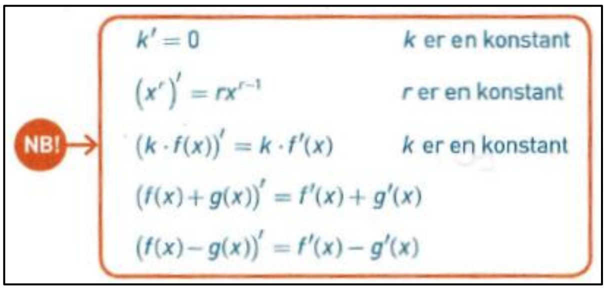


Figur 11: Illustrasjon i forbindelse med forklaring av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Hentet fra M1T.

I den visualiserende forklaringen beskrives også følgende: «Vi lar punktet B nærme seg punktet A» (Heir et al., 2014, s. 265). Videre bemerkes det at stigningstallet til linjen nærmer seg den deriverte når Δx går mot null, før det konkluderes med at: «Nå dukker uttrykket for den deriverte opp!» (Heir et al., 2014, s. 265). Deretter anvendes uttrykket for å derivere funksjonen $f(x) = x^2$. I tillegg avsluttes denne delen med følgende i uthevede felt: «$f'(x)$ er den verdien $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nærmer seg når Δx nærmer seg null» (Heir et al., 2014, s. 265), og «$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$» (Heir et al., 2014, s. 265). Da det ikke presiseres i det siste uthevede feltet at dette er grenseverdidefinisjonen av den deriverte, kommer det ikke helt tydelig frem hva som er grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Før metoden for å finne den deriverte ved grenseverdidefinisjonen oppsummeres, forklares det kort om grenseverdier. Vi går mer i detalj om denne forklaringen i delkapittel 4.2.5. Oppsummeringen består av tre trinn, og kan bidra til å øke *instrumentell forståelse*.

Den første *derivasjonsregelen* som presenteres er regelen for derivasjon av en lineær funksjon, $(ax + b)' = a$. Forklaringen tar utgangspunkt i den grafiske tolkningen av den deriverte for en spesifikk funksjon. Følgende står i et uthevet felt: «For alle førstegradsfunksjoner er den deriverte det samme som stigningstallet for grafen til funksjonen.» (Heir et al., 2014, s. 233). Her har vi en forklaring som kan øke *relasjonell forståelse*, men forklaringen har mangler da det ikke forklares hvorfor den deriverte av en lineær funksjon er stigningstallet. Derivasjon av en konstant funksjon blir deretter behandlet som et spesialtilfelle av en lineær funksjon, $f(x) = ax + b$, der $a = 0$. Forklaringen består av et spesifikt eksempel med tilhørende graf, og den generelle regelen legges deretter frem på følgende måte: «Den deriverte av en konstant funksjon er null.» (Heir et al., 2014, s. 233). Her ser vi et eksempel på *manglende symbolbruk.* Videre kommer det vi vil klassifisere som en forklaring som kan bidra til *relasjonell forståelse:* «(…) vekstfarten er null i alle punkter på grafen (…)» (Heir et al., 2014, s. 233). Forklaringer av begge derivasjonsregler nevnt i dette avsnittet anser vi som *spesifikke til generelle forklaringer.*

Forklaringen av de resterende derivasjonsreglene innledes slik: «I underkapittel 5H tar vi for oss den algebraiske definisjonen av den deriverte. Den kan vi bruke til å utlede derivasjonsregler.» (Heir et al., 2014, s. 235). Her brukes begrepet algebraisk definisjon av den deriverte, det vi omtaler som *grenseverdidefinisjonen av den deriverte,* uten forklaring av hva det betyr. Det er ingen utledning av derivasjonsreglene, og forklaringen består kun av spesifikke eksempler der derivasjonsreglene anvendes på funksjonsuttrykk. Vi har her *spesifikke til generelle forklaringer,* ettersom derivasjonsreglene først presenteres spesifikt i eksempler, for deretter å presenteres generelt i feltet illustrert i Figur 12.


NB!

$k' = 0$ $\quad$ k er en konstant

$(x^r)' = rx^{r-1}$ $\quad$ r er en konstant

$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$ $\quad$ k er en konstant

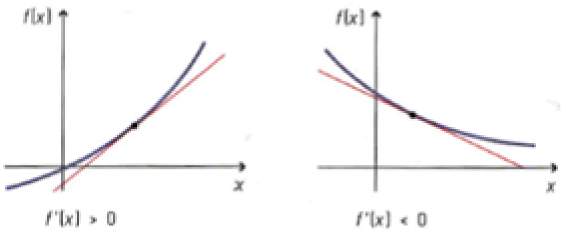
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

Figur 12: Presentasjon av derivasjonsregler. Hentet fra M1T.

Avslutningsvis kommenteres følgende om derivasjonsreglene: «I del 1 av eksamen må du finne den deriverte ved regning. Det er derfor viktig at du behersker dette. I del 2 kan du bruke hjelpemidler for å finne den deriverte.» (Heir et al., 2014, s. 237). Dette vil vi klassifisere som en *motiverende begrunnelse* med fokus på ytre motivasjon.

Forklaringen av *funksjonsdrøfting* begynner med et delkapittel om fortegnet til den deriverte. Dette delkapitlet innledes av illustrasjonene i Figur 13 med følgende spørsmål: «Av figurene nedenfor ser du kanskje sammenhengen mellom grafen til en funksjon og fortegnet til den deriverte?» (Heir et al.,



Figur 13: Illustrasjon i forbindelse med forklaringen av funksjonsdrøfting. Hentet fra M1T.

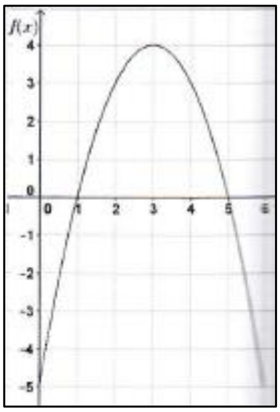
2014, s. 241). Her har vi en forklaring med *aktiv elevrolle*. Under figurene følger en tekst om fortegnet til den deriverte når en funksjon stiger og synker. Videre beskrives følgende om funksjonsdrøfting i et uthevet felt: «Når grafen stiger mot høyre er den deriverte positiv. Når grafen synker mot høyre, er den deriverte negativ.» (Heir et al., 2014, s. 241). Her har vi forklaring som kan bidra til økt forståelse med forklaring av matematikken med et hverdagslig språk. Illustrasjonene og den tilhørende teksten beskrevet i dette avsnittet utgjør en *visualiserende forklaring*.

Deretter følger en forklaring av stasjonære punkter som kan øke *relasjonell forståelse* da det påpekes hvorfor den deriverte er null i slike punkter: «I topp- og bunnpunkter er tangenten til grafen horisontal. Derfor er stigningstallet til tangenten null i disse punktene.» (Heir et al., 2014, s. 241). Fremstillingen av funksjonsdrøfting fortsetter med beskrivelser av hvordan en kan tegne fortegnslinjen til den deriverte med tre ulike utgangspunkt; ved hjelp av grafen til funksjonen og grafen til den deriverte, og ved faktorisering av funksjonsuttrykket til den deriverte. Ettersom tegning av fortegnslinjer presenteres med alle disse tre utgangspunktene blir forklaringen av fortegnslinjer en *mer fullstendig forklaring*. Blant disse tre utgangspunktene er tegning av fortegnslinje med utgangspunkt i regning den minst vektlagte metoden. I fremstillingen av fortegnslinjer står det i tillegg følgende: «I underkapittel 5F skal vi drøfte egenskaper for funksjoner. Da er det viktig å se sammenhengen mellom grafen til en funksjon, grafen til den deriverte av funksjonen og fortegnslinjen til den deriverte.» (Heir et al., 2014, s. 244). Denne kommentaren klassifiseres som en *motiverende begrunnelse,* fordi det påpekes at elevene vil få bruk for kunnskapen omtalt i dette avsnittet ved et senere tidspunkt.

Fremstillingen av funksjonsdrøfting fortsetter med en forklaring av hva det vil si å drøfte en funksjon: «Det betyr å finne noen egenskaper ved funksjonen og grafen til funksjonen.» (Heir et al., 2014, s. 250). Dette presiseres som følgende: «I dette underkapitlet vil drøfting av en funksjon omfatte disse punktene: • Finne hvor funksjonen vokser, og hvor den minker • Finne topp- og bunnpunkter på grafen • Tegne grafen» (Heir et al., 2014, s. 250). Her kommer det tydelig frem hva funksjonsdrøfting omhandler og innebærer. Deretter gis en punktvis oversikt over hvilken informasjon en fortegnslinje kan gi om grafen med utgangspunkt i et spesifikt eksempel, og vi har her en *visualiserende forklaring*. Avslutningsvis er følgende definisjon av den generelle sammenhengen mellom den deriverte til en funksjon og selve funksjonen: «Når $f'(x)$ er positiv i et intervall, vokser $f(x)$. Grafen stiger mot høyre. Når $f'(x)$ er negativ i et intervall, minker $f(x)$. Grafen synker mot høyre»

(Heir et al., 2014, s. 250). Her har vi et tilfelle av *manglende symbolbruk*. Alt i alt er forklaringen beskrevet i dette avsnittet en *spesifikk til generell forklaring.*

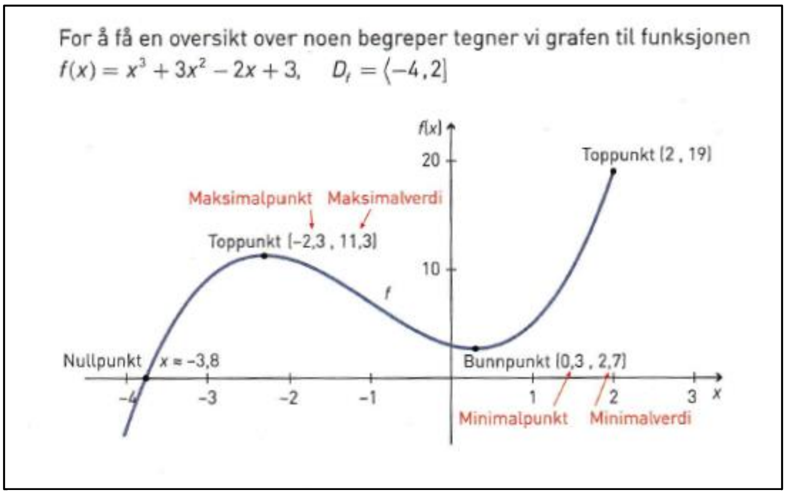
I beskrivelsen av funksjonsdrøfting introduseres også følgende 17 begreper: toppunkt, bunnpunkt, minimalverdi, minimalpunkt, maksimalverdi, maksimalpunkt, ekstremalverdi, ekstremalpunkt, monotoniegenskaper, randpunkt, absolutt maksimum, absolutt minimum, kritiske x-verdier, terrassepunkt, stasjonært punkt, lokalt maksimum og lokalt minimum (Heir et al., 2014). Dette bidrar til en *bred begrepsbruk*. Etter forklaring av topp- og bunnpunkter, og et eksempel, bemerkes følgende: «I eksempel 16 er $(0, -1)$ et bunnpunkt på grafen. Funksjonsverdien -1 er mindre enn funksjonsverdiene i nabopunktene. Men dette punktet svarer ikke til det laveste punktet på grafen.» (Heir et al., 2014, s. 251). Her anvendes definisjonen av stasjonærpunkter med nabopunkter (se delkapittel 2.9), og det gir en *mer fullstendig forklaring*, samt en forklaring som kan bidra til å *hindre misoppfatninger*. Tilsvarende bemerkes for toppunktet i eksemplet. Forklaringen blir dermed en *mer fullstendig forklaring.* Følgende kommenteres videre om begrepet *randpunkter*: «Eventuelle randpunkter på en graf skal tas med som topp- og bunnpunkter.» (Heir et al., 2014, s. 252).



Figur 14: Illustrasjon i forbindelse med forklaringen av funksjonsdrøfting. Hentet fra M1T

Begrepene *absolutt maksimum* og *absolutt minimum* forklares med utgangspunkt i Figur 14 på følgende måte: «Den største funksjonsverdien i definisjonsmengden har vi i punktet $(3, 4)$. 4 kalles *absolutt maksimum* for funksjonen. Tilsvarende har vi den minste funksjonsverdien i punktet $(0, -5)$. -5 er et *absolutt minimum.*» (Heir et al., 2014, s. 253). Formuleringen er presis, men vi klassifiserer allikevel forklaringen som en *mindre fullstendig forklaring* ettersom den ikke er generell. I denne forklaringen blir heller ikke de to begrepene satt i sammenheng med begrepene lokale maksimum og lokale minimum. Det er ingen bilder med både lokale og globale stasjonære punkter i kapitlet.

Begrepet *kritiske x-verdier* defineres slik: «Kritiske x-verdier for en funksjon er x-verdiene i de punktene vi må undersøke for å finne eventuelle topp- eller bunnpunkt på grafen. Disse punktene finner vi • der den deriverte er null •der den deriverte ikke eksisterer • i eventuelle randpunkter» (Heir et al., 2014, s. 253). Denne definisjonen bidrar til å gjøre forklaringen av stasjonære punkter til en *mer fullstendig forklaring,* fordi den inkluderer punkter der den deriverte ikke eksisterer og eventuelle randpunkter. I tillegg kommenteres følgende om stasjonære punkter: «For at grafen til en funksjon f skal ha et toppunkt eller et bunnpunkt i et stasjonært punkt, må $f'(x)$ skifte fortegn i punktet.» (Heir et al., 2014, s. 254). Begrepet *terrassepunkt* omtales ikke med en tydelig definisjon eller forklaring, og vi klassifiserer derfor dette som en *mindre fullstendig forklaring*. Introduksjonen av de 17 begrepene avsluttes med en visuell oppsummering med utgangspunkt i et spesifikt eksempel. Dette er den eneste illustrasjonen med disse begrepene (se Figur 15).



Figur 15: Illustrasjon i forbindelse med forklaring av funksjonsdrøfting. Hentet fra M1T.

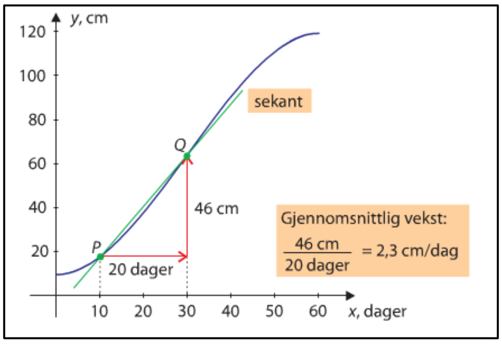
Forklaringen av *praktiske eksempler knyttet til funksjonsdrøfting* kommer i delkapitlet etter det teoretiske om funksjonsdrøfting. Det kommenteres ikke at teori om funksjonsdrøfting anvendes i dette delkapitlet. Denne delen består av tre eksempler om overskudd ved produksjon og salg, optimalisering av volumet til en kube og optimalisering av en funksjon. I det sistnevnte eksemplet anvendes den dynamiske programvaren GeoGebra for å finne ut i hvilket punkt funksjonen vokser raskest ved å finne største verdi av den deriverte. Dette kan være en «forsmak» til den dobbeltderiverte og viser flere sider ved derivasjonsbegrepet. Vi vil klassifisere dette som en *mer fullstendig forklaring.* I dette delkapitlet brukes ikke begrepene optimering, toppunkt, bunnpunkt og funksjonsdrøfting, og det er derfor manglende begrepsbruk.

Innholdet i derivasjonskapitlet i den norske læreboken Sigma 1T

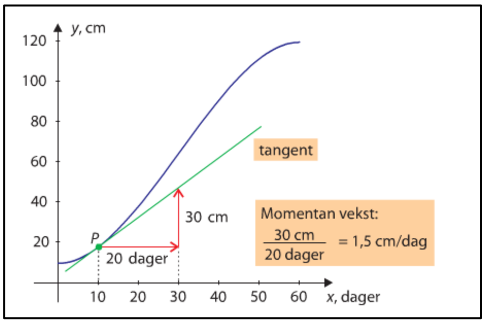
Hovedinnledningen til derivasjonskapitlet har en beskrivelse av kapitlets innhold, i tillegg til flere motiverende elementer. For det første påpekes det at derivasjon har anvendelser i «naturvitenskap, ingeniørfag og økonomi» (Øgrim et al., 2013, s. 275). For det andre er det en kort historisk bakgrunn om derivasjon, der navn som Descartes, de Roberval, Newton og Leibniz trekkes fram. I tillegg er det en tidslinje som viser de viktigste fremskrittene i derivasjon. Hovedinnledningen inneholder også alle kompetansemålene som behandles i kapitlet.

Forklaringen av derivasjonsbegrepet begynner med repetisjon av gjennomsnittlig vekstfart. Her er det et eksempel om en solsikkes vekst med forklaringstekst og grafer med beskrivende symboler og begreper (se Figur 16 og Figur 17). Deretter introduseres momentan vekstfart med følgende spørsmål: «Hvor raskt vokser solsikken etter ti dager?» (Øgrim et al., 2013, s. 278). Bruken av ordet «etter» kan føre til at elever oppfatter at en skal finne ut hvor raskt den vokser i perioden fra og med den tiende dagen, og dermed gi misoppfatning i forbindelse med tolkningen av derivasjon. Det nevnte spørsmålet besvares slik:

> For å finne ut det lar vi Q nærme seg P på grafen. Da dreier sekanten seg om P. Vi ender opp med tangenten i punktet P som vist på figuren nedenfor. Stigningstallet til denne tangenten kaller vi den momentane veksten for solsikken når $x = 10$. (Øgrim et al., 2013, s. 278).



Figur 16: Graf som illustrer gjennomsnittlig vekst. Hentet fra Sigma 1T.

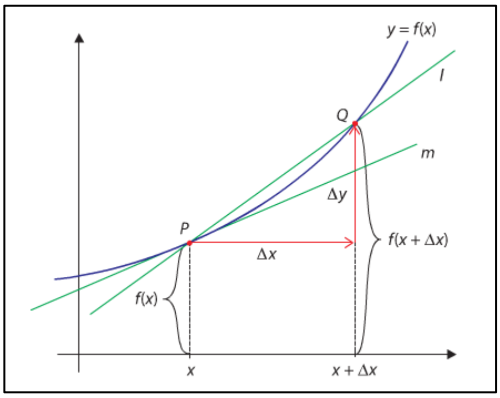


Figur 17: Graf som illustrer momentan vekst. Hentet fra Sigma 1T.

Alt i alt er dette en *visualiserende forklaring*.

Selve derivasjonsbegrepet introduseres i delkapittel 8.3 med referanse til det forrige delkapitlet om vekstfart. Derivasjonsbegrepet introduseres slik: «I matematikk bruker vi en forkortet skrivemåte for den momentane veksten når $x = 10$. Vi skriver $f'(10)$ og leser «f derivert i 10.»»(sjekk anførselstegn) (Øgrim et al., 2013, s. 280), og slik: «Husk at den deriverte bare er et forkortet navn på den momentane vekstfarten.». I et uthevet felt beskrives derivasjon som: «$f'(a)$ er den momentane veksten for $x = a$. $f'(a)$ leser vi «f derivert i a».» (Øgrim et al., 2013, s. 280). Det fremkommer av disse sitatene at derivasjon og momentan vekstfart er det samme, men formuleringen «forkortet skrivemåte» kan sende signaler om at begrepet momentan vekstfart er viktigere og skal brukes fremfor derivasjon. Det blir feil, da begrepet derivasjon er mer presist. Grenseverdidefinisjonen av den deriverte er ikke inkludert i innføringen av derivasjonsbegrepet, og vi vil derfor klassifisere dette som en *mindre fullstendig forklaring.*

Grenseverdedefinisjonen av den deriverte utledes og forklares i delkapittel 8.8; flere delkapitler etter at derivasjonsbegrepet introduseres. Av den grunn er dette en *diskutabel rekkefølge*. Utledningen av definisjonen er stegvis på en metodisk måte for $y = f(x)$, og illustreres med en graf med beskrivende symboler (se Figur 18).



Figur 18: Illustrasjon til utledning av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Hentet fra Sigma 1T.

Forklaringen er dermed en *visualiserende forklaring*. I utledningen beskrives blant annet: «Når Δx går mot null, vil sekanten l gjennom P og Q nærme seg tangenten m til kurven gjennom P.» (Øgrim et al., 2013, s. 290) Selve definisjonen, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, er ikke med i utledningen. Denne kommer først i løsningsteksten til et spesifikt eksempel i samme delkapittel, og her presiseres det ikke hva som er grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Forklaringen er en *mindre fullstendig forklaring* da det ikke kommer tydelig frem hva definisjonen er. Det nevnte eksemplet etterfølges av følgende kommentar om bruk av grenseverdidefinisjonen av den deriverte for å derivere en funksjon: «I trinn 4 ovenfor var det mulig å faktorisere telleren ved å sette $\boldsymbol{\Delta x}$ utenfor. Det skal alltid være mulig. I motsatt fall er det en indikasjon på at du kanskje har regnet galt.» (Øgrim et al., 2013, s. 291). Dette er en *mindre fullstendig forklaring,* fordi det ikke spesifiseres at dette kun gjelder for polynomfunksjoner, og kan føre til misoppfatninger.

Forklaringen av derivasjonsregler, som kommer i delkapittel 8.4, innledes på følgende måte: «Vi skal lære regler for å derivere enkle funksjoner for hånd. Men først skal vi se på den viktige forskjellen mellom $f(x)$ og $f'(x)$.» (Øgrim et al., 2013, s. 282). Her har vi et motiverende element, fordi elevene får vite hva delkapitlet omhandler. Forskjellen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ forklares slik: «$f(x)$ forteller hvor høyt grafen ligger over x-aksen. $f'(x)$ forteller hvor raskt grafen vokser.» (Øgrim et al., 2013, s. 282). Det nevnes ikke at $f(x)$ også kan fortelle hvor langt grafen ligger under x-aksen eller at $f'(x)$ også kan fortelle hvor raskt grafen avtar. Denne forklaringen er derfor en *mindre fullstendig forklaring.* Samtidig kan den korte forklaringen som er med klassifiseres som forklaring som kan hindre misoppfatninger, ved at den gir noe innsikt i forskjellen mellom $f(x)$ og $f'(x)$. Forskjellen mellom $f(x)$ og $f'(x)$ kommer i delkapitlet om derivasjonsregler, og ikke i delkapitlet der derivasjonsbegrepet innføres. Vi anser derfor dette som en *diskutabel rekkefølge*.

Den første *derivasjonsregelen* som forklares er regelen for derivasjon av konstante funksjoner $f(x) = c$. Forklaringen er som følger: «Grafen til en konstant funksjon verken stiger eller faller. Den har nullvekst overalt, det vil si at den deriverte er lik null for alle verdier av x.» (Øgrim et al., 2013, s. 282). Deretter forklares regelen for derivasjon av lineære funksjoner som stigningstallet til funksjonen $f(x) = ax$, ettersom «(…) veksten er overalt lik stigningstallet a» (Øgrim et al., 2013, s. 282). Begge disse reglene har forklaringer som kan bidra til å øke elevenes *relasjonelle forståelse,* i tillegg til den *instrumentelle forståelsen*. Lineære funksjoner representeres ikke som $f(x) \ = \ ax + b$, og det gir en *mindre fullstendig forklaring* av den deriverte av lineære funksjoner. Følgende kommenteres også om lineære

KONSTANT FUNKSJON

$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = 5$	$f'(x) = 0$
$f(x) = -9$	$f'(x) = 0$
$f(x) = 0{,}7$	$f'(x) = 0$

LINEÆR FUNKSJON

$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = 3x$	$f'(x) = 3$
$f(x) = -9x$	$f'(x) = -9$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$

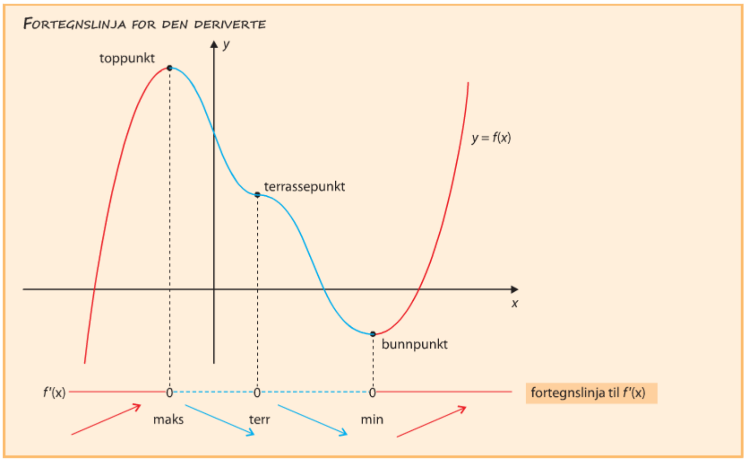
Figur 19: «Huskelapper» med regler og numeriske eksemplifiseringer. Hentet fra Sigma 1T.

funksjoner: «Legg spesielt merke til at når $f\ (x) = x$, er $f'(x)\ =\ 1$.» (Øgrim et al., 2013, s. 282). Dette klassifiseres som *forklaring som kan hindre mulige misoppfatninger*. Begge reglene nevnt i dette avsnittet illustreres med grafer for spesifikke eksempler, og vi har derfor *visualiserende forklaringer*. I tillegg er det «Huskelapper» med derivasjonsreglene og flere *numeriske eksemplifiseringer* (se Figur 19), som kan gi elevene *økt instrumentell forståelse*.

Regelen for derivasjon av funksjoner på formen $f(x) = x^n$ introduseres med et bilde av tre elever som har regnet ut den deriverte for hver sin potensfunksjon for flere ulike x-verdier. Den ene eleven har ikke fullført alle beregningene sine, og leseren av boken blir bedt om å finne mønsteret og fullføre beregningene. Her har vi en forklaring med *aktiv elevrolle*. Under bildet presenteres beregningen, og den generelle regelen, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, presenteres i en «Huskelapp» med flere numeriske eksempler. Vi har her *numerisk eksemplifiseringer* som kan gi økt forståelse. I delkapittel 8.9, altså flere delkapitler etter introduksjon av derivasjonsregelen for potenser av x, presenteres beviset for denne derivasjonsregelen. Dette klassifiserer vi som en *diskutabel rekkefølge*. Beviset av derivasjonsregelen utføres med grenseverdidefinisjonen av den deriverte anvendt på funksjonen $f(x)\ =\ x^4$. I den forbindelse forklares Pascals trekant og binomialformelen for å gi verktøyene til å regne ut og løse opp uttrykk av typen $(x\ +\ \Delta x)^4$. Etter beviset for det spesifikke eksemplet, bevises derivasjonsregelen for en generell funksjon $f(x) = x^n$, også dette ved hjelp av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. I beviset er det en *spesifikk til generell forklaring*. Alt i alt klassifiseres forklaringen av derivasjonsregelen for potensfunksjoner som en *mer fullstendig forklaring*, spesielt fordi beviset er inkludert.

Reglene for derivasjon av funksjoner på formen $f(x)\ =\ a\ \cdot\ u(x)$ og $f(x)\ =\ u(x)\ +\ v(x)$ introduseres i delkapittel 8.5. Begge reglene introduseres med spesifikke eksempler om hunders ukentlige vekst. Vi har dermed *visualiserende forklaringer*. Det første eksemplet omhandler tre identiske hunder som vokser i henhold til den deriverte av den samme funksjonen: «Dersom hver av dem vokser med 0,35 kg/uke, vil de tre valpene til sammen vokse med $3 \cdot 0{,}35\ kg/uke = 1{,}05 kg/uke$.» (Øgrim et al., 2013, s. 284). Den generelle regelen presenteres deretter slik: «Dette illustrerer regelen for veksten til en konstant multiplisert med en funksjon, $f(x) = a \cdot u(x)$. Den deriverte blir multiplisert med veksten av funksjonen, $f'(x) = a \cdot u'(x)$. Vi kan altså holde konstanter i produkter utenfor når vi deriverer.» (Øgrim et al., 2013, s. 284). Denne siste setningen i sitatet kan bidra til å øke elevenes *instrumentelle forståelse* med en forklaring av regelen med hverdagslig språk. Det andre eksemplet omhandler to hunder som vokser i henhold til den deriverte av to ulike funksjoner: «Vi illustrerer situasjonen med valpene Uax og Vax som vokser med henholdsvis 0,35 kg/uke og 0,43 kg/uke. Samlet vokser de med 0,35 kg/uke + 0,43 kg/uke = 0,78 kg/uke.» (Øgrim et al., 2013, s. 284). Den generelle regelen presenteres slik: «Den generelle regelen gjelder veksten av en sum, $f(x) = u(x) + v(x)$. Her blir den samlede veksten lik summen av vekstene, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Det vil si at vi kan derivere ledd for ledd.» (Øgrim et al., 2013, s. 284). Den siste setningen kan også her klassifiseres som forklaring som kan bidra til å øke elevenes *instrumentelle forståelse.* Begge reglene utheves i en «Huskelapp» med noen numeriske eksempler. Også her har vi *numeriske eksemplifiseringer* som kan gi økt forståelse. Begge eksemplene om hundene kan øke forståelsen for tolkningen av derivasjon da vekst og derivasjon knyttes sammen.

Forklaringen av funksjonsdrøfting kommer i delkapittel 8.6 med en forklaringstekst til en illustrasjon av en graf. I denne illustrasjonen er det beskrivende begreper og en fortegnslinje (se Figur 20). Vi har her en *visualiserende forklaring* som kan gi god sammenheng mellom begreper, men symboler brukes ikke i denne forklaringen. Videre defineres stasjonære punkter på følgende måte: «I toppunkt, bunnpunkt og terrassepunkter har vi nullvekst. Da er $f'(x)$ lik null.» (Øgrim et al., 2013, s. 286). Det er *manglende symbolbruk* med formuleringen «$f'(x)$ lik null» fremfor «$f'(x) = 0$». Funksjonsdrøfting defineres deretter slik: «Ut fra fortegnslinja for den deriverte kan vi avgjøre hvor grafen stiger, hvor den faller, og hvor det eventuelt er toppunkt, bunnpunkt eller terrassepunkt. Når vi resonnerer på denne måten, sier vi at vi drøfter funksjonen.» (Øgrim et al., 2013, s. 286). Her har vi en *bred begrepsbruk* da alle de tre stasjonærpunktene nevnes med navn. Forklaringen av de tre begrepene er imidlertid



Figur 20: Illustrasjon i forbindelse med forklaring av funksjonsdrøfting. Hentet fra Sigma 1T.

en *mindre fullstendig forklaring* ettersom det ikke presiseres at fortegnet til den deriverte skifter i topp- og bunnpunkter, men ikke i terrassepunkter.

Forklaringen av praktiske eksempler knyttet til funksjonsdrøfting blir gjennomgått i delkapittel 8.7. Delkapitlet starter rett på et praktisk eksempel om å finne det største volumet til en boks. Det kommenteres ikke at delkapitlet inneholder anvendelser av teori om funksjonsdrøfting fra forrige delkapittel. Begrepene toppunkt, bunnpunkt og funksjonsdrøfting nevnes heller ikke i dette delkapitlet, og vi har derfor *manglende begrepsbruk*. Begrepet *ekstremalverdier* brukes imidlertid, og med følgende definisjon: «Største eller minste verdier kaller vi ekstremalverdier.» (Øgrim et al., 2013, s. 288).

Avslutningsvis i derivasjonskapitlet, i delkapittel 8.10 ved navn «Sammensatt eksempel», trekkes det også frem et praktisk eksempel. Eksemplet omhandler temperaturmåling der en skal finne høyeste og laveste temperatur, samt når på døgnet disse inntreffer. I tillegg skal en finne ut når temperaturen endrer seg raskest. Løsningen av denne siste deloppgaven i eksemplet presenteres slik:

> Temperaturendringen er gitt ved $T'(x) = -0{,}018x^2 + 0{,}37x - 1$. Vi finner toppunktet på vanlig måte ved å derivere $T'(x)$: $T''(x) = -0{,}36x + 0{,}37$. Så setter vi den deriverte lik null og får $T''(x) = 0$ når $x = 10{,}28$. Vi ser at vi har den største temperaturendringen etter $10{,}28$ timer. Da er $T'(x) = 0{,}90$. (Øgrim et al., 2013, s. 295).

Selv om dobbeltderivasjon ikke er pensum i Matematikk 1T, gir det her en *mer fullstendig forklaring* av derivasjon fordi det viser flere bruksområder og sider ved derivasjon. Alle de *praktiske eksemplene knyttet til derivasjon* klassifiseres som *motiverende elementer* ettersom de er virkelighetsnære.

Innholdet i derivasjonskapitlet i den singaporeanske læreboken AM

Derivasjonskapitlet innledes med flere motiverende elementer. For det første er det en kort historisk bakgrunn for derivasjon der det nevnes at Newton og Leibniz la grunnlaget. For det andre trekkes det frem at derivasjon kan anvendes i vitenskapene og i problemer fra virkeligheten. Til slutt i denne innledningen beskrives hva elevene skal lære om i kapitlet og hvilke læringsmål som behandles.

Forklaringen av derivasjonsbegrepet innledes med repetisjon av tidligere forkunnskaper. Blant disse forkunnskapene er metoden for å finne stigningstallet til en rett linje. I tillegg beskrives metoden for å finne momentan vekstfart i et punkt ved å tegne tangenten gjennom dette punktet. Det stilles spørsmålstegn til denne sistnevnte metoden på følgende måte: «Is this method of finding the gradient of a curve at any point by drawing a tangent every time very tedious?» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 338). En annen ulempe ved metoden påpekes deretter: «Moreover, the answer obtained is only an estimate due to the inaccuracy of plotting the points on a curve and drawing a tangent. » (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 338). Disse sitatene vil vi klassifisere som en *motiverende begrunnelse*, fordi det adresseres et behov for å lære en nøyaktig metode for å finne momentan vekstfart. Derivasjonsbegrepet innføres i den forbindelse som denne mer nøyaktige metoden. Deretter følger en utforskningsaktivitet om momentan vekstfart, og det refereres til denne i den påfølgende forklaringsteksten. Det gir en forklaring med en *aktiv elevrolle*. Grenseverdidefinisjonen av den deriverte er ikke med i læreboken, og forklaringen er derfor en *mindre fullstendig forklaring*.

Videre i *forklaringen av derivasjonsbegrepet* introduseres relevant notasjon med utgangspunkt i grafen fra utforskningsaktiviteten. De følgende tre notasjonene for derivasjon innføres: $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ og $\frac{d}{dx}(f(x))$. I forklaringen av symbolene er det også tatt med to *forklaringer som kan forhindre mulige misoppfatninger*: «$\frac{dy}{dx}$ is ***not*** dividing dy by dx.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 339) og «The *gradient* of a curve at a particular point is a numerical value, while the *gradient function* of a curve is a function.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 339).

Den første *derivasjonsregelen* som introduseres er $(x^n)' = nx^{n-1}$. Denne innføres i en ny utforskningsaktivitet, og vi klassifiserer derfor dette som en forklaring med *aktiv elevrolle.* Gjennomgangen av denne derivasjonsregelen avsluttes med følgende i et uthevet felt: «In general, $\frac{dy}{dx}(\mathrm{x}^n) = n\mathrm{x}^{n-1}$, where *n* is a real number.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 340). I tillegg bemerkes følgende: «How to remember this formula: '(…) bring down the power *n* and subtract one from the current power *n* to get the new power'.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 340). Denne forklaringen kan øke instrumentell forståelse med en hverdagslig forklaring av regelen. Det presenteres ikke egne regler for derivasjon av lineære funksjoner eller konstanter, og en del av det faglige innholdet er derfor utelukket.

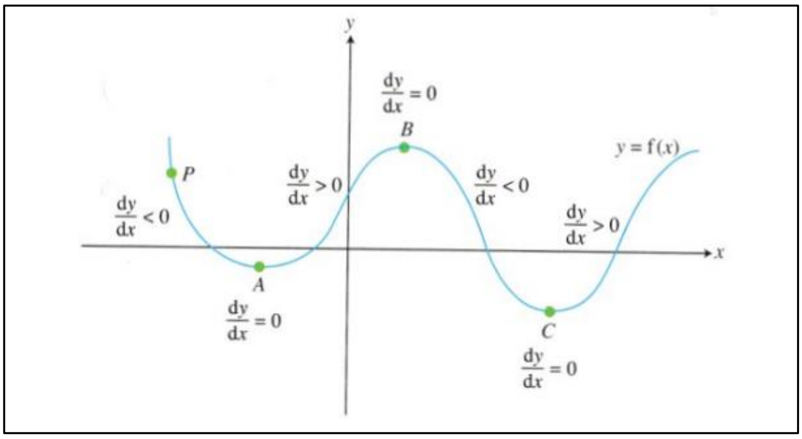
De neste derivasjonsreglene legges frem slik: «Consider the function $kf(x)$, where k is a constant and $f(x)$ is a function. We call k a **scalar multiple**. This rule states that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[k\mathrm{f}(\mathrm{x})] = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[f(x)]$.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 341) og «If $f(x)$ and $g(x)$ are functions, then $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)} \mp \mathrm{g(x)}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)}] \mp \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[g(x)]$. Rule 2 is also known as the **Addition/Subtraction Rule**.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 341). Her ser vi en *bred begrepsbruk* med begrepen i fet skrift. Videre er det to huskeregler som kan fremme *instrumentell forståelse* grunnet «muntlig» forklaring: «How to remember this rule: 'if *k* is a scalar multiple, leave *k* alone when you differentiate'.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 341) og «How to remember this rule: 'for the sum or difference of functions, just differentiate each function separately'.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 341). Det bemerkes også følgende: «You can differentiate each *term* seperately (Addition and Subtraction Rule), but you cannot differentiate each *factor* separately, i.e. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[(2\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+2)] \neq (2)(1) = 2$.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 342). Denne bemerkningen kvalifiserer til *forklaring som kan forhindre mulige misoppfatninger.* I tillegg til de hittil nevnte derivasjonsreglene, presenteres tre regler som ikke er pensum i Matematikk 1T i Norge; kjerneregelen, produktregelen og kvotientregelen. Etter presentasjonen av derivasjonsreglene presenteres likningen for tangenten og likningen til normalen til en graf. Tangentlikningen presenteres med utgangspunkt i grafen til en spesifikk funksjon. Normallikningen er ikke pensum i Matematikk 1T i Norge.

Teori om *funksjonsdrøfting* kommer i et eget kapittel rett etter kapitlet med derivasjonsbegrepet og derivasjonsreglene. I innledningen til dette kapitlet er det læringsmål og følgende tekst om produksjon av hermetikkbokser som vi anser som et *motiverende element*:

> In the supermarket, we see many cylindrical cans that are used to store food. How do manufacturers determine the dimensions of these cans so as to minimise the cost of manufacturing? In this chapter we will learn to solve questions which involve finding the minimum amount of metal required to manufacture a can. (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 366)

Deretter presenteres dobbeltderivasjon, som ikke er pensum i Matematikk 1T i Norge, og som vi derfor utelukker. Gjennomgangen av synkende og stigende funksjoner begynner med en «Thinking Time» der elevene skal utforske sammenhengen mellom en økende funksjon og fortegnet til stigningstallet til tangenten, og tilsvarende for en synkende funksjon. På den neste siden presenteres «fasiten» til denne utforskningen. Denne presentasjonen tar utgangspunkt i to grafer, der det påpekes når funksjonene synker og stiger, og hvilket fortegn den deriverte da har. Dette vil vi klassifisere som en *visualiserende forklaring* der elevene har en *aktiv elevrolle.*

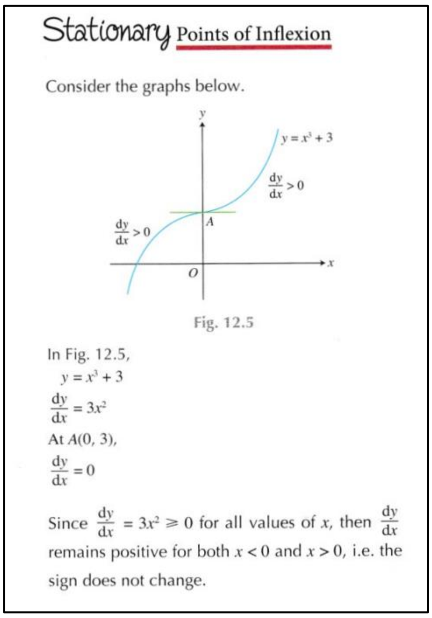
I den videre gjennomgangen av funksjonsdrøfting presenteres stasjonære punkter med utgangspunkt i grafen vist i Figur 21. Under grafen er det en forklaringstekst om stasjonære punkter, og vi har dermed en *visualiserende forklaring*. Et eksempel på formuleringer i denne forklaringsteksten er som følger: «The stationary point A is a **minimum point** as the value of y is less than the other values of y in the neighbourhood.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 375).



Figur 21: Illustrasjon I forbindelse med forklaring av stasjonære punkter. Hentet fra AM.

Dette vil vi klassifisere som en *mer fullstendig forklaring* av stasjonære punkter fordi det både blir tatt utgangspunkt i at den deriverte er lik null og utgangspunkt i verdiene til nabopunktene. Det påpekes også at fortegnet til den deriverte er forskjellig på hver side av minimumspunktet. Etter denne teksten presenteres en analogi for maksimums- og minimumspunkter i form av en graf med berg- og dalbanevogner. Der knyttes bergtoppene til maksimumspunkt, og dalbunnene til minimumspunkt. I tillegg knyttes fortegnet til tangentens stigningstall i ulike punkter på berg- og dalbane-grafen til turer oppover og nedover med vognen. Denne analogien klassifiserer vi som en *visualiserende forklaring.*

Stasjonære punkter som ikke er topp- eller bunnpunkt forklares deretter med to eksempler. Et av dem vises i Figur 22. Det forklares videre at punktene i eksemplene hverken er maksimums- eller minimumspunkter, men «(…) stationary points of inflexion (…)» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 377) (terrassepunkter). Vi vil klassifisere dette som en *mer fullstendig forklaring* av terrassepunkter, fordi det forklares at fortegnet til den deriverte ikke skifter fortegn i et slikt punkt. I forklaringen av stasjonære punkter kommenteres det også at en kan avgjøre hvilket stasjonært punkt en har med å gjøre ut i fra hvordan fortegnet til tangent til grafen endres i dette stasjonære punktet.

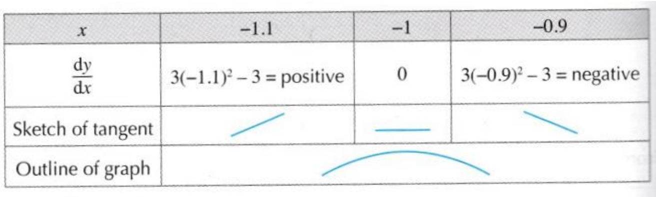


Figur 22: Illustrasjon i forbindelse med forklaring av terrassepunkt. Hentet fra AM.

Videre i gjennomgangen av funksjonsdrøfting er det enda en utforskningsoppgave. Denne har tittelen «Stationary Points using the First Derivative Test» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s.

376) og kommer etter en forklaringstekst der resultatene av utforskningen i aktiviteten er beskrevet. Vi kategoriserer derfor dette som en *diskutabel rekkefølge*. I forbindelse med stasjonære punkter bemerkes følgende: «There are other types of points of inflexion that are ***not*** stationary. In this chapter we will only deal with stationary points of inflexion.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 378). Dette vil vi klassifisere som en *mer fullstendig forklaring*. Dette etterfølges av en oppsummering av funnene.

I de videre eksemplene presenteres fortegnslinjer på en litt annen måte enn i de norske lærebøkene. Dette illustreres i Figur 23. Etter eksempler og oppgaver, forklares mer om funksjonsdrøfting med dobbeltderiverttesten for å bestemme typen stasjonært punkt. Dette er ikke pensum i Matematikk 1T. Avslutningsvis i derivasjonskapitlet er det *praktiske eksempler knyttet til funksjonsdrøfting*. Eksemplene omhandler optimalisering av areal til ulike todimensjonale og tredimensjonale figurer, samt maksimal størrelse av en figur for minst mulig produksjonskostnad.



x	-1.1	-1	-0.9
$\frac{dy}{dx}$	$3(-1.1)^2 - 3 =$ positive	0	$3(-0.9)^2 - 3 =$ negative
Sketch of tangent			
Outline of graph			

Figur 23: Fortegnslinje for funksjonen $f(x) = 3x^2 - 3$. Hentet fra AM.

Innholdet i derivasjonskapitlet i den singaporeanske læreboken DAM

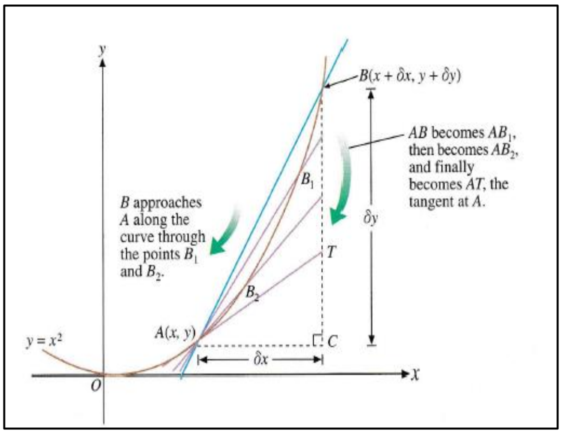
De innledende sidene til derivasjonskapitlet består av en vei-tid kurve med følgende tekst:

> Many real life problems, especially those found in engineering and science, can be solved using derivatives. An example is to apply derivatives to model and learn more about the behaviour of an object that moves in a curvilinear motion, as illustrated above. When the displacement of the vehicle from its starting point is plotted against time, it can be represented by a curve. By using differentiation, the velocity of the vehicle at an instant, which is given by the gradient of the curve at that instant, can be obtained. (Chow & Ling, 2010, s. 271)

En slik tekst kan vekke interessen til elevene, og er derfor et *motiverende element.* I denne innledningen er det også læringsmål. Videre er det repetisjon av relevante forkunnskaper i en «Flashback». Forkunnskapene som repeteres er stigningstallet til en rett linje og momentan vekstfart til en ikke-lineær kurve.

Forklaringen av derivasjonsbegrepet innledes med følgende: «As we have learnt, finding the gradient of a curve from a graph is quite tedious and is usually not accurate enough either. Let us introduce a way to find the gradient of a curve analytically.» (Chow & Ling, 2010, s. 273). Dette klassifiserer vi som en *motiverende begrunnelse*, og det etterfølges av en utforskningsaktivitet med en *aktiv elevrolle*. Hensikten med denne utforskningsaktiviteten er: «To recognise that the gradient of a curve at a given point A is the limit of the gradient of the line AB, where B is a point moving along the curve towards A.» (Chow & Ling, 2010, s. 273). Følgende bemerkes i margen: «The symbol ”δx” is read as ”delta x”. It is taken as a whole to represent a small quantity.» (Chow & Ling, 2010, s. 274).

I den videre *forklaringen av derivasjonsbegrepet* inngår grafen tilknyttet utforskningsaktivteten (se Figur 24). Med utgangspunkt i denne illustrasjonen blir grenseverdidefinisjonen av den deriverte utledet, og vi har her en *visualiserende forklaring*. I den forbindelse bemerkes det med en «Remark» at: «$AC = \delta x$ is the change in the value of x. $BC = \delta y$ is the change in the value of y.» (Chow & Ling, 2010, s. 274). Stigningstallet til tangenten i Figur 24 blir deretter presentert som «$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$» (Chow & Ling, 2010, s. 274).

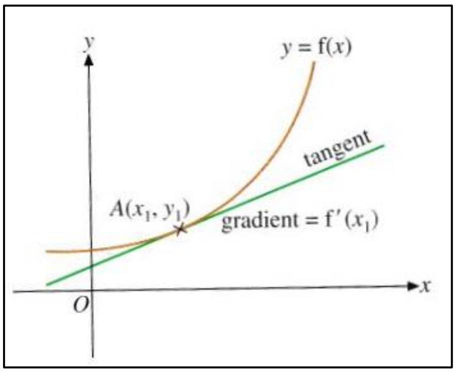


Figur 24: Illustrasjon i forbindelse med utledning av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Hentet fra DAM.

Før selve derivasjonsbegrepet introduseres, repeteres stigningstall nok en gang i et «Recall»-felt. Deretter forklares følgende: «For a function $y = f(x)$, the limit, $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$, is called the **derivative** of the function with respect to x.» (Chow & Ling, 2010, s. 275). Her innføres også tre ulike notasjoner for den deriverte: $\frac{\delta y}{\delta x}$, $f'(x)$ og $\frac{\delta}{\delta x}[f(x)]$, og følgende står skrevet i et uthevet felt: «$\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$» (Chow & Ling, 2010, s. 275). Deretter kommenteres det at grensen må eksistere for at dette skal gjelde. *Forklaringen av derivasjonsbegrepet* i denne læreboken vil vi klassifisere som en *mer fullstending forklaring*, fordi den både inneholder *grenseverdidefinisjonen av den deriverte* og den grafiske tolkningen av den deriverte. Etter utledningen av grenseverdidefinisjonen av den deriverte, anvendes denne for å derivere funksjonene $f(x) = x^2$ og $f(x) = 2x$. I margen ved siden av dette er det en «Remark» med *numeriske eksemplifiseringer* som kan bidra til å styrke forklaringen.

Avslutningsvis i *forklaringen av derivasjonsbegrepet* kommenteres det at: «The derivative of a function $f(x)$ is also a function of x itself.» (Chow & Ling, 2010, s. 275). Dette anser vi som en *forklaring som kan forhindre misoppfatninger*. Det innføres deretter ny notasjon for den deriverte i et gitt punkt: «For a curve $y = f(x)$, the value of the derivative at a point (x_0, y_0) is denoted by $\frac{dy}{dx}\,\big|_{x=x_0}$ or $f'(x_0)$.» (Chow & Ling, 2010, s. 275). Denne nye notasjonen brukes i følgende uthevede felt: «Gradient of a curve at (x_0, y_0) = $\frac{dy}{dx}\,\big|_{x=x_0}$ » (Chow & Ling, 2010, s. 275). Dette illustreres med et numerisk eksempel fra utforskningsaktiviteten. Følgende bemerkning, som kan gi økt *instrumentell forståelse,* står i en «Remark»: «For a curve $y = f(x)$, it's derivative $\frac{dy}{dx}$ gives the gradient function of the curve. That is, the gradient of a curve at a point (a, b) can be found by using $\frac{dy}{dx}$.» (Chow & Ling, 2010, s. 275).

Det neste temaet som blir gjennomgått er tangenter. Det repeteres at: «(…) the gradient of a curve at (x_1, y_1) = $\frac{dy}{dx}\,\big|_{x=x_1} = f'(x_1)$.» (Chow & Ling, 2010, s. 303). Forklaringen av tangenter er også her en *visualiserende forklaring* da den inneholder en illustrasjon av grafen til en funksjon og en tangent, samt markerte symboler og begreper (se Figur 25). Dette etterfølges av formelen for tangentligningen. Deretter presenteres normaler, som ikke er pensum i Matematikk 1T i Norge.



Figur 25: Illustrasjon i forbindelse med forklaring av tangenter. Hentet fra DAM.

Forklaringen av *derivasjonsregler* innledes med følgende tekst:

> The process of obtaining the derivative of a function is called **differentiation.** In the following sections, we shall introduce some formulae and rules of differentiation. Due to the scope of the book, the formula and rules are stated without proof. (Chow & Ling, 2010, s. 277).

Denne teksten inneholder et *motiverende element* i form av en tekst som gir elevene informasjon om hva de skal lære. Derivasjonsreglene presenteres uten bevis eller forklaringer, og vi klassifiserer derfor dette som *mindre fullstendige forklaringer*. Derivasjon av lineære funksjoner, $y = ax + b$, blir ikke presentert som en egen regel. Den første derivasjonsregelen som presenteres er regelen for derivasjon av $f(x) = x^n$. Det refereres til den nevnte utforskningsaktiviteten der den deriverte av $y = x^2$ ble beregnet. Regelen presenteres i et uthevet felt: «If n is a rational number, $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.» (Chow & Ling, 2010, s. 277). Deretter bemerkes blant annet følgende i en «Remark»: «When n is a positive integer, the derivative of $y = x^n$ can be found by evaluating $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{(x + \delta x)^n - x^n}{\delta x}$.» (Chow & Ling, 2010, s. 275).

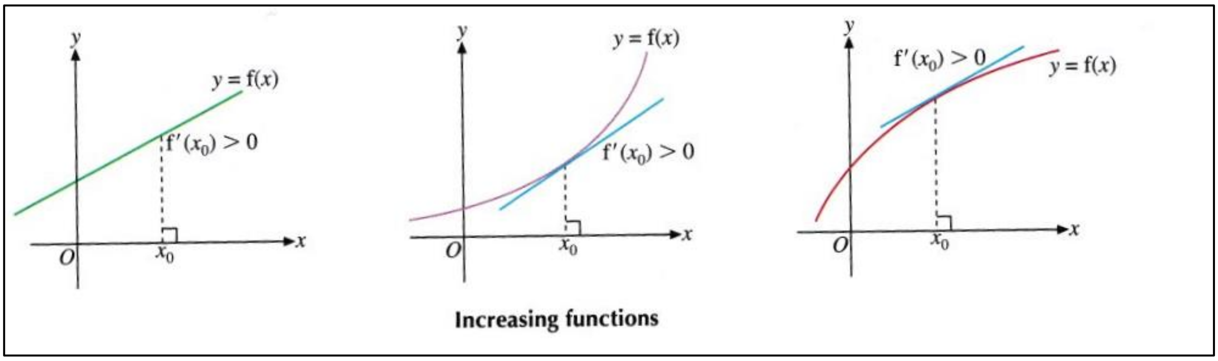
Presentasjonen av derivasjonsreglene fortsetter med derivasjon av $kf(x)$, der k er en konstant: «If k is a constant, then $\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\ \frac{d}{dx}[f(x)] = kf'(x)$.» (Chow & Ling, 2010, s. 278). Denne regelen anvendes deretter på tilfellet der $f(x) = x^n$ i en «Remark» i margen. Videre følger et eksempel der det bemerkes at den deriverte av enhver konstant er lik null. De neste derivasjonsreglene som presenteres er reglene for derivasjon av en sum og en differanse av flere funksjoner. Reglene forklares først med ord, og deretter med symboler i uthevede felter. Summasjonsregelen defineres på følgende måte i uthevet felt: «If $u = f(x)$ and $v = g(x)$, then $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$, i. e. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.» (Chow & Ling, 2010, s. 275). Differanseregelen er presentert på tilsvarende måte. I eksemplet som følger regelen for derivasjon av en sum av funksjoner er det en «Analysis» av oppgaven. Dette er en forklaring av løsningsstrategi som kan bidra til å øke både elevenes *instrumentelle* og *relasjonelle forståelse*, i tillegg til en at dette blir en *mer fullstendig forklaring.* I den videre forklaringen av derivasjonsregler blir regler som ikke er pensum i Matematikk 1T i Norge presentert. Disse reglene er produktregelen, kvotientregelen og kjerneregelen. I tillegg presenteres derivasjon av trigonometriske funksjoner og dobbelderivasjon.

Temaene *funksjonsdrøfting* og *praktiske problemer knyttet til funksjonsdrøfting* blir gjennomgått i kapittel 14. Hovedinnledningen til dette kapitlet inneholder læreplanmålene og en illustrasjon av en festhatt med markering av høyden og radien, samt følgende tekst:

> Jenny wants to make a paper hat for her birthday party. The hat is in the shape of a cone such that the sum of the height and the base radius is 30 cm. Can you find the height and the base radius such that the volume of her paper hat is at its maximum? (Chow & Ling, 2010, s. 321).

Her ser vi en praktisk anvendelse som et *motiverende element* i hovedinnledningen. Kapitlet innledes også med en «Flashback» med repetisjon av formlene for overflatearealet og volumet til figurene sylinder og kjegle, i tillegg til repetisjon om dobbelderivasjon, som vi ikke går nærmere inn på da det ikke er pensum i Matematikk 1T i Norge. Forklaringen av *funksjonsdrøfting* begynner med en beskrivelse av sammenhengen mellom fortegnet til den deriverte til en funksjon og funksjonsgrafens øking og minking. Dette er illustrert som i Figur

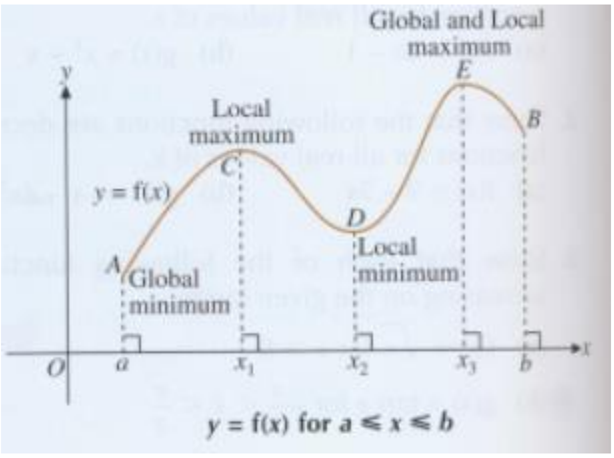
26 for økende funksjoner og tilsvarende for minkende funksjoner.



Figur 26: Illustrasjon i forbindelse med forklaringen av sammenhengen mellom fortegnet til den deriverte og stigende funksjoner. Hentet fra DAM.

I forklaringsteksten knyttet til figurene ovenfor er det beskrivende kommentarer til bildene, og vi har her en *visualiserende forklaring.* Det er i tillegg et uthevet felt med følgende setninger: «If $f'(x) > 0$ for all x on an interval $a \leq x \leq b$, then $y = f(x)$ is increasing on the interval $a \leq x \leq b$.» (Chow & Ling, 2010, s. 323) og «If $f'(x) < 0$ for all x on an interval $a \leq x \leq b$, then $y = f(x)$ is decreasing on the interval $a \leq x \leq b$.» (Chow & Ling, 2010, s. 323). I disse sitatene er det *bred symbolbruk*. I margen ved siden av forklaringsteksten er det følgende to «Mathsfun»-felter: «If $y = f(t)$ is the height of a baby at time t, then $f(t)$ is an increasing function.» (Chow & Ling, 2010, s. 323) og «If $y = f(x)$ is the intensity of light at a distance x from a light source, then $f(x)$ is a decreasing function.» (Chow & Ling, 2010, s. 323). Begge «Mathsfun»-feltene er *visualiserende forklaringer*, fordi de kan gi eleven et mentalt bilde som kan gi økt forståelse.

Forklaringen av funksjonsdrøfting fortsetter så med en *visualiserende forklaring* av stasjonære punkter (se Figur 27). I forklaringsteksten knyttet til figurene er det beskrivende kommentarer til bildene, og der beskrives lokale og globale maksimums- og minimumspunkter, i tillegg til terrassepunkter. Dette bidrar til en *bred begrepsbruk.* Globale maksimums- og minimumspunkter forklares på følgende måte: «The **global maximum value** of the function is the greatest value of the function on the interval, while the **global minimum value** is the smallest value of the function on the same interval.» (Chow & Ling, 2010, s. 326). I margen ved siden av denne forklaringsteksten er det følgende

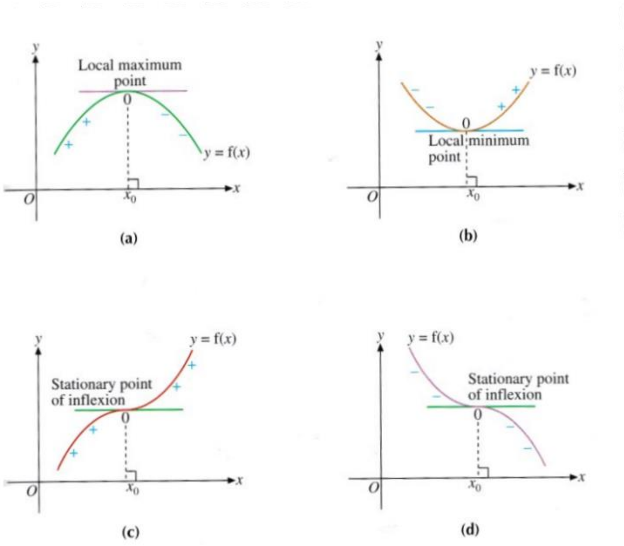


Figur 27: globale og lokale maksimums- og minimumspunkt. Hentet fra DAM.

«Remark»-felt: «A local maximum point looks like a peak on a curve, while a local minimum point looks like a trough.» (Chow & Ling, 2010, s. 326)**.** Her har vi en *visualiserende forklaring* som viser forskjellen mellom globale og lokale stasjonære punkter.

Både første- og andrederiverttesten trekkes frem som mulige metoder for å avgjøre hvilken type et stasjonært punkt er. I det følgende beskrives kun forklaringen av førstederiverttesten da dobbeltderivasjon ikke er pensum i Matematikk 1T i Norge. Førstederiverttesten innledes med en utforskningsaktivitet der hensikten er å utforske egenskaper ved den deriverte til en funksjon i en omegn om et stasjonært punkt. Her har vi en forklaring med *aktiv elevrolle*.

Etter klasseaktiviteten presenteres førstederiverttesten, og slik gjøres det eksempelvis for maksimumspunkter: «If $f(x_0) = 0$ and the sign of $f'(x)$ changes from $+$ to – as x increases through x_0, then $f(x_0)$ is a maximum value of $f(x)$, i.e. $\left(x_0, f(x_0)\right)$ is a maximum point.» (Chow & Ling, 2010, s. 327). Hvert av de stasjonære punktene illustreres i Figur 28. I margen ved siden av disse illustrasjonene er det følgende remark: «In the diagrams in this chapter, the '+' and '-' signs along a curve indicate the sign of the gradient of the curve.» (Chow & Ling, 2010, s. 327)**.** For å bestemme om et maksimumspunkt eller minimumspunkt er lokalt eller globalt er det tips i læreboken om å studere grafen for det aktuelle intervallet. Dette kan øke den *instrumentelle forståelsen* til elevene. I eksemplene i dette delkapitlet er det små kommentarer ved siden av utregningene om hvert steg, for eksempel: «Solve for the x-coordinate of each stationary point using $f'(x)$.» (Chow & Ling, 2010, s. 328) og «Find the y-coordinate of each stationary point.» (Chow & Ling, 2010, s. 328). Disse kommentarene kan bidra til å øke elevenes *instrumentelle forståelse.*



Figur 28: Illustrasjon i forbindelse med forklaring av stasjonære punkter. Hentet fra DAM.

Forklaringen av *praktiske problemer knyttet til funksjonsdrøfting* innledes av følgende: «By applying the technique of locating the maxima and minima of a function we can solve some maximisation and minimisation problems. Let us look at som examples.» (Chow & Ling, 2010, s. 334). Her ser vi at innholdet i delkapitlet relateres til det foregående om teori om funksjondrøfting. Det første praktiske eksemplet omhandler produksjon av en sylindrisk metallboks som skal ha så lite overflateareal som mulig. Vi har her et *motiverende element* ettersom eksemplet er virkelighetsnært. Før utregningen i eksemplet, er det en «Analysis» av eksempeloppgaven, og det kan bidra til å øke *instrumentell forståelse*. I margen ved siden av eksemplet er det et «Discuss»-felt med følgende innhold: «Can we express r in terms of h in (1) and then substitute r into (2) to solve the problem?» (Chow & Ling, 2010, s. 335)**.** Her er (1) og (2) henholdsvis uttrykk for volum og overflateareal av sylinderet. I tillegg til at det blir en *aktiv elevrolle* i eksemplet, kan spørsmålet i «Discuss»-feltet bidra til å øke elevenes *relasjonelle forståelse*. Årsaken er at det kan få elevene til å bli klar over at r er den samme i begge uttrykkene (1) og (2).

Det andre praktiske eksemplet går ut på å finne det største volumet til et sylinder. Sylindret har variabel radius og høyde og er inne i en kjegle med konstant radius og høyde. I dette eksemplet er det både en tredimensjonal og en todimensjonal illustrasjon av figurene med markering av de ulike lengdene og symbolene. Dette kan øke elevenes *instrumentelle forståelse* med tips om å tegne både to- og tredimensjonal illustrasjoner for få til lignende oppgaver.

Tendenser fra kvalitativ analyse av lærebøkenes derivasjonskapittel

Innledningene til derivasjonskapitlet i Sigma 1T, AM og DAM inneholder flere motiverende elementer enn M1T og Sinus 1T. I resten av derivasjonskapitlet har alle lærebøkene innslag av motiverende begrunnelser, flere praktiske og virkelighetsnære eksempler og bilder. Når det gjelder til læringsmodell i lærebøkene er oppbygningen «activities-cours-excersises» en tendens blant de singaporeanske lærebøkene, spesielt med tanke på de induktive aktivitetene og at det refereres til disse i forklaringstekstene. Blant de norske lærebøkene er oppbygningen «exposition-examples-excersises» en tendens. Det er imidlertid noen innslag av forklaringer der det legges opp til en aktiv elevrolle i de norske lærebøkene også.

Forklaringene i alle lærebøkene inkluderer bruk av bilder, og vi ser en generell tendens blant lærebøkene til at visualiserende forklaringer inkluderes. I tillegg ser vi en tendens til eksempler som kan gi *økt instrumentell forståelse* i begge landenes lærebøker. Videre kan også flere av eksemplene i lærebøkene gi økt *relasjonell forståelse*. Alle lærebøkene referer til tidligere forkunnskaper der det er naturlig. I forbindelse med slik repetisjon er det en sterkere tendens til å aktivisere forkunnskaper i de singaporeanske lærebøkene enn i de norske. Innledningsvis i AM og DAM er det egne avsnitt med kun repetisjon, og det er tydeligere påminnelser om hvilke spesifikke kunnskaper elevene må trekke frem igjen.

Når det gjelder det faglige innholdet i lærebøkene, dekker alle lærebøkene i liknende grad læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T. Det er imidlertid noen forskjeller. Sinus 1T og DAM har med grenseverdidefinisjonen av den deriverte i innledningen av derivasjonskapitlet. Denne definisjonen har Sigma 1T og M1T bakerst i kapitlet, mens AM ikke har med denne i det hele tatt. Videre dekker Sigma 1T læreplanmålet i større grad enn de andre bøkene når det kommer til å «(…) bruke definisjonen til å utleie ein derivasjonsregel for polynomfunksjonar (…)» (Utdanningsdirektoratet, 2013b) da beviset for derivasjon av potensfunksjoner er med. En annen forskjell mellom lærebøkene er tendensen til introdusering av flere regler i de norske lærebøkene enn i de singaporeanske. Videre presenterer lærebøkene fortegnslinjer på ulike måter. M1T skiller seg ut ved å gå i detalj om hvordan fortegnslinjer lages fra flere ulike utgangspunkt. I de Singaporeanske lærebøkene har fortegnslinjene en annen utforming enn i de norske.

Det matematiske språket har visse forskjeller i de ulike lærebøkene. Det er en tendens til mer symbolbruk i de singaporeanske lærebøkene enn i de norske. Når det kommer til begrepsbruk er bøkene relativt like, med unntak av enkelttilfeller. M1T, DAM og AM har den sterkeste tendensen til hyppig begrepsbruk i det matematiske språket. M1T og AM inneholder også forklaringer som kan gjøre det matematiske språket og matematikken mindre abstrakt. I de to bøkene beskrives hva bruk av derivasjonsreglene innebærer i praksis med et hverdagslig språk.

4.2.4 Kvalitativ analyse av derivasjonsoppgaver

I det følgende er det en kvalitativ analyse av derivasjonsoppgavene i matematikklærebøkene. Funnene omfatter beskrivelser av ulike oppgavetyper som *refleksjonsoppgaver*, *oppgaver knyttet til den induktive metode*, *oppgaver knyttet til tolkningen av den deriverte* og oppgaver der en må bruke *flere ulike fremgangsmåter* (se side 36). I tillegg trekker vi frem spesielle og generelle trekk, som vanskelighetsgrad og variasjon, blant oppgavene i lærebøkene.

Oppgavene i derivasjonskapitlet i den norske læreboken Sinus1T

Etter introduksjon av et nytt tema er det eksempler og noen oppgaver uten nivåinndeling. Bakerst i læreboken er det samlet flere øvingsoppgaver med følgende tre underoverskrifter: «Kategori 1», «Kategori 2» og «Blandede oppgaver». De to kategoriene er nivådifferensierte på følgende måte: «Kategori 1 inneholder oppgaver for elever som sliter med faget.» (Oldervoll et al., 2009, s. 3) og «Oppgavene i Kategori 2 er tiltenkt den jevne matematikkeleven.» (Oldervoll et al., 2009, s. 3). Alle oppgavene i de to kategoriene er delt inn etter delkapittel med tydelige overskrifter slik at elevene enkelt kan finne relevant informasjon i derivasjonskapitlet. Vanskelighetsgraden på oppgavene i «Blandede oppgaver» er omtrent som Kategori 2, men forskjellen er at de blandede oppgavene ikke er ordnet etter delkapittel. Elevene må her: «(…) ofte kombinere stoff fra flere delkapitler og kapitler.» (Oldervoll et al., 2009, s. 3).

I denne læreboken er spørsmålene i *refleksjonsoppgavene* som følger: «Forklar svaret» og «Hva forteller svaret?». Her er det få varianter av refleksjonsoppgaver. Videre kan fire av oppgavene i derivasjonskapitlet knyttes til den *induktive metoden*, og disse har spørsmål av typen: «Hva tror du (…) blir?». Se Figur 29 for to slike oppgaver der elevene skal utforske og tenke seg frem til generelle sammenhenger basert på et numerisk mønster. De to oppgavene i Figur 29 kommer i delkapitlet rett før delkapitlet der de to derivasjonsreglene $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$ og $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ introduseres. Av andre oppgaver som er interessante, er en oppgave der elevene skal bruke grenseverdidefinisjonen av den deriverte til å utlede en derivasjonsregel.

Oppgave 8.33

a) Bruk formelen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ til å finne $(x^2)'$.
b) Bruk definisjonen av den deriverte til å finne $(3x^2)'$.
c) Hva tror du $(4x^2)'$ er?
d) Hva tror du $(k \cdot x^2)'$ er når k er et tall?

Oppgave 8.34

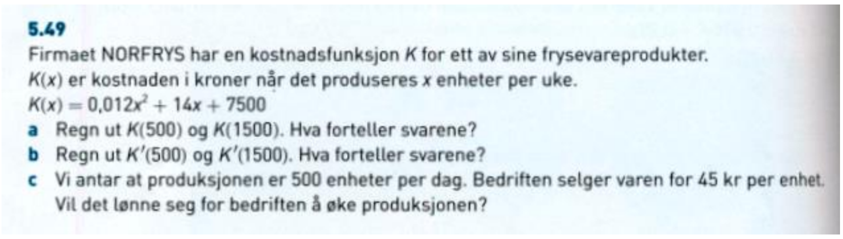
a) Finn $(x^2)'$ og $(3x)'$ på enklest mulig måte.
b) La funksjonen f være gitt ved $f(x) = x^2 + 3x$.
Bruk definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$.
c) Hvilken sammenheng er det mellom svarene i oppgave a og b?
d) Hva tror du den deriverte til disse funksjonene er?
1) $f(x) = x^2 - 2x + 7$ **2)** $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ **3)** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 6$

Figur 29: Oppgaver knyttet til den induktive metoden. Hentet fra Sinus 1T.

Oppgavene i derivasjonskapitlet i den norske læreboken M1T

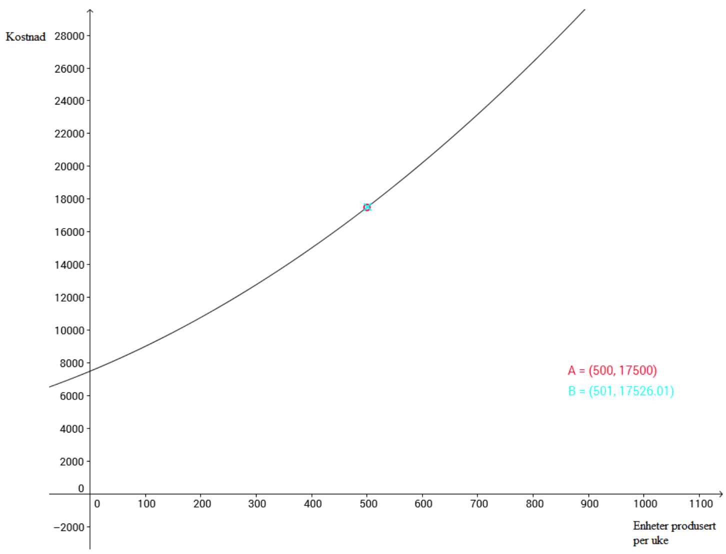
Det er oppgaver underveis i delkapitlene og til slutt i hvert delkapittel. De sistnevnte oppgavene er delt inn etter to nivåer; rødt nivå for elever som «(…) trenger mer drill.» (Heir et al., 2014, s. 3) og blått nivå for elever som «(…) mestrer lærestoffet godt.» (Heir et al., 2014, s. 3). Underveis i kapitlene er det oppgaver av typen «Snakke matte» der det oppfordres til refleksjon og diskusjon. Kapitlet avsluttes med en kapitteltest der elevene tester om de har forstått det viktigste i kapitlet. Oppgavene i kapitteltesten er fra alle delkapitlene, og det kommer ikke frem hvilke delkapitler hver oppgave tilhører. Disse oppgavene regner vi derfor som *blandede oppgaver*. Bakerst i boken er det oppgaver for eksamenstrening med referanser til hvilke kapitler som er relevante for hver oppgave.

I denne læreboken er spørsmålene i *refleksjonsoppgavene* som følger: «Hva forteller svarene?», «Kommenter resultatet», «Gi en tolkning av svarene», «Forklar hva svarene forteller», «Begrunn svaret» og «Hva har du funnet?». Her er det et stort spekter av ulike refleksjonsoppgaver. Elevene får også mulighet til å reflektere over matematikken gjennom å besvare «Snakke matte»-oppgaver, som for eksempel: «I en bakteriekultur er antall bakterier etter t døgn gitt ved en funksjon $N(t)$. Tangenten til grafen til N i punktet $(2, N(2))$ har stigningstall 200. Hva forteller dette om bakteriekulturen?» (Heir et al., 2014, s. 227) og «Forklar med egne ord hva reglene ovenfor sier.» (Heir et al., 2014, s. 235). Det siste sitatet omhandler derivasjonsregler. Videre finnes det også oppgaver i læreboken der elevene oppfordres til å bruke *flere ulike fremgangsmåter* i løsningen. I en slik oppgave blir elevene først bedt om å bruke grafen til en funksjon for å bestemme ulike egenskaper ved funksjonen, og deretter gjøre dette ved regning.


5.49
Firmaet NORFRYS har en kostnadsfunksjon K for ett av sine frysevareprodukter.
$K(x)$ er kostnaden i kroner når det produseres x enheter per uke.
$K(x) = 0{,}012x^2 + 14x + 7500$
a Regn ut $K(500)$ og $K(1500)$. Hva forteller svarene?
b Regn ut $K'(500)$ og $K'(1500)$. Hva forteller svarene?
c Vi antar at produksjonen er 500 enheter per dag. Bedriften selger varen for 45 kr per enhet. Vil det lønne seg for bedriften å øke produksjonen?

Figur 30: Oppgave tilknyttet tolkningen av den deriverte, hentet fra M1T.

Én av oppgavene i boken er knyttet til *tolkningen av den deriverte* (se Figur 30). Løsningen av oppgave a) er at $f'(500) = 26$. Det betyr at kostnaden øker med tilnærmet 26 kroner når produksjonen øker fra 500 til 501 enheter. Den deriverte gir i dette tilfellet en god tilnærming til kostnadsveksten fra $x = 500$ til $x = 501$ enheter, fordi $\Delta x = 501 - 500 = 1$ er et lite tall i forhold til det totale antall enheter. Dette illustreres i Figur 31 der punktene for $x = 500$ og $x = 501$ er svært nærme hverandre. Svaret på oppgave c er at det lønner seg å øke produksjonen fra 500 til 501 enheter når varen selges for 45 kroner per enhet, med tanke på at kostnaden kun stiger med 26 kroner per enhet. I M1T er det ingen oppgaver knyttet til den *induktive metoden.*

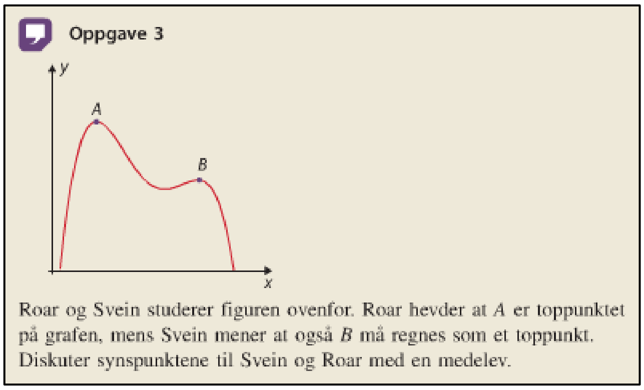


Figur 31: Graf som illustrerer at punktene $(500, f(500))$ og $(501, f(501))$ er svært nærme hverandre.

Oppgavene i derivasjonskapitlet i den norske læreboken Sigma 1T

Hvert delkapittel avsluttes med noen øvingsoppgaver, uten nivådeling, knyttet til delkapitlets innhold. Bakerst i kapitlet er det «Test deg selv»-oppgaver, «Les, skriv og snakk» og «Øvingsoppgaver». «Test deg selv» består av oppgaver der elevene får testet om de har fått med seg det viktigste i kapitlet. «Les, skriv og snakk» inneholder: «(...) oppgaver som trener grunnleggende ferdigheter.» (Øgrim et al., 2013, s. 3). I disse oppgavene får elevene trent på ferdighetene lesing, skriving og snakking, i tillegg til regning. «Øvingsoppgavene» er delt inn med delkapitlene som underoverskrifter, i tillegg til underoverskriften «Blandede oppgaver». Sistnevnte inneholder oppgaver på tvers av alle delkapitlene uten referanser til hvilken del av lærestoffet oppgavene er hentet fra.

I denne læreboken er spørsmålene i *refleksjonsoppgavene* som følger: «Diskuter», «Forklar hvorfor», «Uttrykk svarene med egne ord», «Hva vil det si at», «Forklar sammenhengen mellom», «Forklar med ord hva svarene uttrykker», «Sammenlikn med de svarene du fant i *b*» og «Hva forteller svaret». Alle disse spørsmålene viser stor variasjon blant refleksjonsoppgavene. Noen av oppgavene i «Les, skriv og snakk» kan også klassifiseres som refleksjonsoppgaver. Dette gjelder blant annet oppgaven vist i Figur 32. Denne oppgaven kan også oppklare en mulig misoppfatning om at et toppunkt som ikke er det maksimale toppunktet ikke er et toppunkt, noe det faktisk er. I tillegg er det oppgaver der elevene oppfordres til å bruke *flere ulike fremgangsmåter* i løsningen. Et eksempel er en oppgave der elevene først skal finne $f'(5)$ for $f(x) = x^2 + 7x + 3$ ved å bruke derivasjonsregler, og deretter ved hjelp av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Av andre oppgaver som skiller seg ut, er en oppgave der elevene skal bevise at $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{nx} \cdot \sqrt[n]{x}$.



Figur 32: Oppgave fra Les, skriv og snakk. Hentet fra Sigma 1T.

Videre er det én oppgave som kan knyttes til *tolkningen av den deriverte*, og den er som følger: «Vi planter et tre som er 1,20 m høyt, og lar $h(t)$ meter være høyden til treet t år etter at det ble plantet. De første årene vokser treet slik at $h'(t) = 0{,}06t + 0{,}10$. Hvor høyt er treet om fem år?» (Øgrim et al., 2013, s. 305). Fasitsvaret i læreboken er den nøyaktige verdien for høyden etter fem år, og vi tolker derfor at lærebokforfatterne ikke har brukt derivasjon for å tilnærme denne verdien. Oppgaven kan løses med antiderivasjon, samt opplysningen om at $h(0) = 1{,}20$, på følgende måte: $h'(t) = 0{,}06t + 0{,}10 \ \rightarrow h(t) = 0{,}03t^2 + 0{,}10t + 1{,}20$. Denne oppgaven har potensiale til å øke forståelsen for tolkningen av den deriverte, og det kommer vi tilbake til under diskusjon av oppgaver knyttet til tolkningen av den deriverte i diskusjonskapitlet (se side 106). Det er ingen oppgaver knyttet til den *induktive metoden.*

Oppgavene i derivasjonskapitlet i den singaporeanske læreboken AM

Underveis i delkapitlene er det «Practice Now»-oppgaver. Hensikten med disse oppgavene er som følger: «At the end of each Worked Example, a similar question will be provided for immediate practice.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. iv). Her får elevene mulighet til å konsolidere egen læring. Etter introduksjon av nye begreper eller nye regler er det nivådelte oppgaver. Disse oppgavene kommer som oftest til slutt i hvert delkapittel, og de tre nivåene er «Basic», «Intermediate» og «Advanced» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013). Underveis i kapitlet er det også oppgaver av typen «Investigation» og «Thinking Time» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013). Følgende beskrives om «Investigation»-oppgavene i lærebokens forord: «Activities are included to guide students to investigate and discover important mathematical concepts so that they can construct their own knowledge meaningfully.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. v). Følgende beskrives om «Thinking Time»-oppgavene: «(…) check if students have grasped various concepts and to create opportunities for them to further develop their thinking.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. v). I tillegg er det aktiviteter av typen «Class Discussion» som har til hensikt å: «(…) assist students to learn new knowledge, think mathematically and enhance their reasoning and oral communication skills.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. v). Hvert kapittel avsluttes med repetisjonsoppgaver som skal: «(…) help students assess their learning.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. iv). I tillegg avsluttes hvert kapittel med et par utfordringsoppgaver som skal: «(...) challenge and stretch high-ability students to their fullest potential.» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. iv).

«Thinking time»-oppgavene i læreboken hører til oppgavetypen *refleksjonsoppgaver*. I den første «Thinking time»-oppgaven blir elevene bedt om å forklare hva den deriverte representerer og finne verdien av den deriverte i et punkt når tangenten gjennom punktet er horisontal og når den er vertikal. Et annet eksempel på en «Thinking Time»-oppgave er en der elevene skal finne den radien som gir det minste volumet av en sylinderformet hermetikkboks. Her skal elevene også reflektere over hvilke andre vurderinger bedriften må foreta seg i forbindelse med produksjon av hermetikkboksene. I den tredje «Thinking Time»-

oppgaven skal elevene utforske sammenhengen mellom en stigende funksjon og stigningstallet til tangenten, og tilsvarende for en avtagende funksjon. Elevene skal besvare oppgaven med utgangspunkt i et spesifikt eksempel. Elevene blir også bedt om å reflektere over denne sammenhengen, og trekke en konklusjon om hva denne sammenhengen er generelt. En annen oppgavetype som hører innunder *refleksjonsoppgaver* er «Class Discussion»-oppgavene. I derivasjonskapitlet er denne som følger: «Discuss with your classmates how differentiation can be applied to solve problems such as in business and the sciences. In each case, what does the derivative represent?» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 389). En tredje oppgavetype som vi regner som *refleksjonsoppgaver* er «Investigation»-oppgavene.

«Investigation»-oppgavene hører også til under *oppgaver knyttet til den induktive metoden*. I den første «Investigation»-oppgaven i derivasjonskapitlet får elevene presentert den deriverte av noen funksjoner på formen x^n for ulike verdier av n. Basert på dette skal elevene selv prøve å derivere x^n for andre verdier av n, og komme frem til en generell regel for derivasjon av funksjoner på formen $f(x) = x^n$. Til slutt skal elevene anvende denne regelen på $y = x$, og vurdere om regelen også gjelder for negative og reelle n. Denne oppgaven kommer før presentasjon av derivasjonsregelen for derivering av funksjoner av typen $f(x) = x^n$. I de to andre «Investigation»-oppgavene i læreboken skal elevene bruke dynamisk programvare i utforskningen. Den første av disse oppgavene går ut på å finne verdien av den momentane vekstfarten til $y = x^2$ i flere ulike punkter. Elevenes skal deretter bruke resultatene fra denne eksperimenteringen til å lage en generell formel for den momentane vekstfarten til $y = x^2$. I den andre av disse oppgavene skal elevene studere fortegnet til den deriverte i to punkter på hver side av et maksimumspunkt, et minimumspunkt og et terrassepunkt. Dette skal gjøres ved å undersøke grafen til $y = ax^2 + bx + c$ for flere ulike verdier av de tre koeffisientene i funksjonsuttrykket. Avslutningsvis i utforskningsoppgaven skal elevene svare på oppsummerende spørsmål om disse sammenhengene. Denne utforskningsoppgaven kommer etter en forklaringstekst om stasjonære punkter og fortegnet til den deriverte rundt slike punkter.

Oppgavene i derivasjonskapitlet i den singaporeanske læreboken DAM

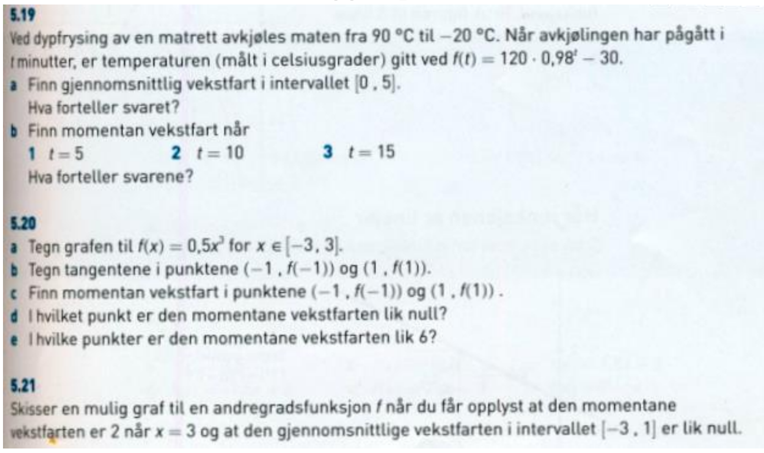
Underveis i delkapitlene er det etter hvert eksempel en lignende oppgave kalt «Try it!». Hensikten med disse oppgavene er, i henhold til bokens forord, at: «(…) a similar question (Try it!) is provided so that students can try it out and check if they have understood the concept(s) presented earlier.» (Chow & Ling, 2010, s. iv). Her får elevene mulighet til å konsolidere egen læring. Underveis i derivasjonskapitlet er det også en type oppgave som beskrives på følgende måte i lærebokens forord: «Class activities allows students to learn mathematics through exploration and discovery.» (Chow & Ling, 2010, s. iv). Til slutt i alle delkapitlene er det nivådelte oppgaver med tre nivåer. Bakerst i hovedkapitlene er det «Revision excercises», der hensikten er som følger: «(…) enables students to revise the concepts taught and thus consolidate their learning.» (Chow & Ling, 2010, s. iv). Disse oppgavene er delt inn i «Short Questions» og «Structured Questions», der sistnevnte er sammensatte oppgaver med flere deloppgaver.

Til slutt i hovedkapitlene er det to oppgavetyper til; «Learn More» og «Your Maths Journal». Den første av disse oppfordrer til videre utforskning av matematikken eller til anvendelser av matematikken i det virkelige liv. I derivasjonskapitlet er oppgaven i «Learn more» å skissere kurver basert på informasjon fra funksjonsdrøfting. I «Your Maths Journal» får elevene en oppgave der de skal reflektere rundt læringsprosessen og erfaringer fra kapitlet. I derivasjonskapitlet er denne oppgaven slik: «Think about events in your daily life. Are there any situations that resemble maxima and minima problems? Briefly describe a situation and its (possible) solution using the techniques learnt in this chapter.» (Chow & Ling, 2010, s. 345).

«Class Activity» er *oppgaver knyttet til den induktive metoden*, og det er to slike oppgaver i derivasjonskapitlet. Hensikten med den første «Class Activity»-oppgaven er som følger: «To recognise that the gradient of a curve at a given point A is the limit of the gradient of the line AB, where B is a point moving along the curve towards A.» (Chow & Ling, 2010, s. 273). Elevene skal i denne aktiviteten bruke dynamisk programvare til å tegne grafen til $f(x) = x^2$. De skal deretter utforske hva som skjer med den gjennomsnittlige vekstfarten mellom to punkter på grafen når det ene punktet nærmer seg det andre. Underveis skal de notere ned observasjoner og trekke slutninger om hva som skjer med størrelsene $\delta x, x + \delta x, y + \delta y$ og $\frac{\delta y}{\delta x}$ når δx går mot null. Den andre «Class Activity»-oppgaven kommer i forbindelse med førstederiverttesten for å avgjøre typen stasjonært punkt. Elevene skal bruke dynamisk programvare for å tegne grafen til ulike funksjoner og finne verdiene til den deriverte på begge sider av et stasjonært punkt. Til slutt skal elevene bruke disse funnene til å trekke en slutning om sammenhengen mellom fortegnet til den deriverte på hver side av et stasjonært punkt og hvilken type stasjonært punkt det er.

Tendenser fra kvalitativ analyse av lærebøkenes derivasjonsoppgaver

Alle lærebøkene har refleksjonsoppgaver og det er størst variasjon blant disse i Sigma 1T og M1T. De singaporeanske lærebøkene og Sinus 1T har oppgaver knyttet til den induktive metoden. En annen tendens er at både M1T og Sigma 1T har flere oppgaver der det oppfordres til å bruke flere løsningsmetoder. Alle lærebøker har konsolideringsoppgaver til slutt i hvert delkapittel, og de singaporeanske lærebøkene har i tillegg et par konsolideringsoppgaver etter hvert eksempel underveis i delkapitlene. I tillegg har alle bøkene blandede oppgaver og nivådifferensierte oppgaver. M1T og Sigma 1T har begge én oppgave som kan øke forståelsen av tolkningen av den deriverte.


5.19
Ved dypfrysing av en matrett avkjøles maten fra 90 °C til −20 °C. Når avkjølingen har pågått i t minutter, er temperaturen (målt i celsiusgrader) gitt ved $f(t) = 120 \cdot 0{,}98^t - 30$.
a Finn gjennomsnittlig vekstfart i intervallet $[0\,,\,5]$.
Hva forteller svaret?
b Finn momentan vekstfart når
1 $t = 5$ **2** $t = 10$ **3** $t = 15$
Hva forteller svarene?

5.20
a Tegn grafen til $f(x) = 0{,}5x^3$ for $x \in [-3\,,\,3]$.
b Tegn tangentene i punktene $(-1\,,\,f(-1))$ og $(1\,,\,f(1))$.
c Finn momentan vekstfart i punktene $(-1\,,\,f(-1))$ og $(1\,,\,f(1))$.
d I hvilket punkt er den momentane vekstfarten lik null?
e I hvilke punkter er den momentane vekstfarten lik 6?

5.21
Skisser en mulig graf til en andregradsfunksjon f når du får opplyst at den momentane vekstfarten er 2 når $x = 3$ og at den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[-3\,,\,1]$ er lik null.

Figur 33: Oppgaver fra M1T som viser et skifte i vanskelighetsgrad. Bilde hentet fra M1T.

I tillegg til de funnene vi har trukket fram i denne analysen, har vi også observert flere tendenser knyttet til variasjon og nivå blant oppgavene. Vi ser en tendens til mer variasjon blant oppgavene i de singaporeanske lærebøkene, blant annet ved at disse oppgavene i større grad er knyttet til praktiske anvendelser. I AM og DAM er det henholdsvis 16 og 14 maksimum- og minimumproblemer der alle figurene som en skal finne minste eller største volum eller areal av, er ulike. Dette er et funn som viser variasjon blant oppgavene. I tillegg ser vi en tendens til at oppgavene generelt sett er på et høyere matematisk nivå i de singaporeanske lærebøkene. Vi ser også tendenser til at vanskelighetsgraden plutselig endres blant oppgavene i Sigma 1T og M1T. Figur 33 viser et slikt tilfelle i M1T der oppgave 5.21 er relativt vanskeligere enn de foregående oppgavene.

4.2.5 Kvalitativ analyse av forkunnskapene til derivasjon

Denne analysen omhandler forkunnskapene grenseverdier, stigningstall, funksjoner og algebra. For de to førstnevnte forkunnskapene gir vi en kort beskrivelse av hvordan lærebøkene gjennomgår emnene, samt på hvilke trinn og i hvilke kapitler disse presenteres. For de to sistnevnte forkunnskapene gir vi kun en oversikt over funksjonstypene som presenteres, de vanskeligste rasjonale uttrykkene som skal forenkles og faktoriseringsteknikker i lærebøkene for de ulike trinnene.

Grenseverdier

Første gang tankegangen bak grenseverdier introduseres i lærebøkene er i forbindelse med hyperbler, det vil si funksjoner på formen $f(x) = \frac{k}{x}$. I den forbindelse nevnes ikke begrepet grenseverdi i noen av lærebøkene. Tabell 11 viser på hvilket klassetrinn dette introduseres, samt i hvilket kapittel. I tabellen er læreverk der tankegangen introduseres tidligst plassert lengst til venstre.

Læreverk	**DM**	**NSM**	**Faktor**	**Sirkel**	**Grunntall**
Klassetrinn	SEC2	SEC2	10.trinn	10.trinn	10. trinn
Kapittelnummer/totalt antall kapitler i læreboken	1/11	1/13	3/7	4 /5	8/9

Tabell 11: Oversikt over på hvilket klassetrinn og i hvilket kapittel tankegangen bak grenseverdier introduseres.

Tabell 11 viser at tankegangen bak grenseverdier introduseres to år før derivasjon introduseres i de singaporeanske lærebøkene og ett år før derivasjon introduseres i de norske lærebøkene. I tillegg ser vi at tankegangen kommer tidligere i Faktor 3 og Sirkel 10 enn i Grunntall 10.

I DM2 står følgende om hyperbler som kan relateres til grenseverdier: «The graph of y against x is a curve which approaches the y-axis when x is small, and it tends to the x-axis as x increases» (Chow & Ling, 2008a, s. 19). I NSM2 er det en «Investigation»-aktivitet der elevene skal fylle inn funksjonsverdiene til $y = \frac{1}{x}$ når x vokser, tegne grafen og beskrive den. Det er ellers ingen koblinger til grenseverdier i den læreboken. I Faktor 3 står det at: «Grafen nærmer seg 0 på førsteaksen, men kommer aldri helt ned!» (Hjardar & Pedersen, 2007, s. 130). I Sirkel 10 i står det at: «Den uavhengige variabelen x kan ikke være 0. Grafen nærmer seg x-aksen når x-verdien øker.» (Torkildsen & Maugsten, 2008b, s. 35). I Grunntall 10 står det at: «I en slik funksjon kan ikke x være null, fordi det ikke gir noen mening å dividere med null. Grafen er derfor delt i to deler.» (Bakke & Bakke, 2007, s. 330). Alt i alt ser vi en sterkere assosiasjon til tankegangen bak grenseverdier i de singaporeanske lærebøkene enn i de norske lærebøkene. I tillegg ser vi at tankegangen kommer tydeligere frem i Faktor 3 og Sirkel 10 enn i Grunntall 10.

Andre gang tankegangen bak grenseverdier kommer i de singaporeanske lærebøkene er i forbindelse med videre forklaring av hyperbler på senere trinn. Da nevnes heller ikke selve begrepet grenseverdi. I DM3 for SEC3 står det da at: «(…) when the numerical value of x is very large, the point on the graph becomes very close to the x-axis but does not touch it.» (Chow & Ling, 2007c, s. 128). I tillegg består forklaringen av grafen og flere numeriske verdier for $y = \frac{1}{x}$ når x blir mindre og mindre. I NSM4 for SEC4 beskrives blant annet følgende om grafen til $y = \frac{1}{x}$: «When x is negative, y becomes larger as x becomes smaller and when x gets very close to 0, y decreases rapidly. In other words, as x approaches zero, y approaches **infinity** (symbol: ∞).» (Teh et al., 2008, s. 7). Grafen til $y = \frac{1}{x}$ er med i både AM og DAM for SEC4, uten kommentarer som kan relatere denne til grenseverdier.

Andre gang tankegangen bak grenseverdier kommer i de norske lærebøkene er i forbindelse med rasjonale funksjoner på VG1, det vil si funksjoner på formen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, der $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer. Begrepet grenseverdi nevnes heller ikke denne gang i noen av lærebøkene. I Sinus 1T står det om funksjonen $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, når x nærmer seg en viss verdi, at: «Funksjonsverdiene i tallverdi vokser ut over alle grenser når x nærmer seg 1.» (Oldervoll et al., 2009, s. 114). I tillegg vises det numerisk hva som skjer med verdien av den samme funksjonen når verdien av x blir større og større. Dette etterfølges av følgende: «Det kan se ut som om funksjonsverdiene nærmer seg 2 for store tallverdier av x» (Oldervoll et al., 2009, s. 114) og «(…) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \approx \frac{2x}{x} = \frac{2}{1} = 2$» (Oldervoll et al., 2009, s. 114). Bruken av «tilnærmet lik»-tegnet blir her det samme som å ta grensen av $f(x)$ når $x \to \infty$. I M1T forklares følgende om et eksempel på en rasjonal funksjon: «Når x er større enn 2, men nærmer seg 2, går funksjonsverdien mot $+\infty$. Når x er mindre enn 2, men nærmer seg 2, går funksjonsverdien mot $-\infty$» (Heir et al., 2014, s. 171). I tillegg trekkes det frem at: «Funksjonsverdien nærmer seg 1,5 når x blir et stadig større positivt tall. Det samme skjer når x går mot $-\infty$.» (Heir et al., 2014, s. 172). I Sigma 1T beskrives følgende om den rasjonale funksjonen $f(x) = \frac{6x+5}{2x-4}$: «For svært store verdier av x ser vi at grafen nærmer seg $y = 3$, men blir aldri lik 3. Tilsvarende nærmer grafen seg $y = 3$ når x går mot minus uendelig.» (Øgrim et al., 2013, s. 254).

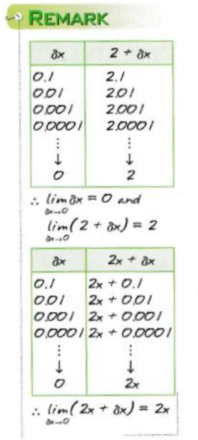
Alt i alt ser vi en utvikling fra første til andre gang tankegangen bak grenseverdier omtales i både de norske og singaporeanske lærebøkene. Sitatene i de to forrige avsnittene viser sterke assosiasjoner til grenseverdier i alle lærebøkene.

Tabellen under viser på hvilket klassetrinn grenseverdibegrepet introduseres, samt i hvilket kapittel. I tabellen er læreverk der begrepet introduseres tidligst plassert lengst til venstre.

Læreverk	**Sinus 1T**	**M1T**	**Sigma 1T**	**DAM**	**AM**
Klassetrinn	VG1	VG1	VG1	SEC4	SEC4
Kapittelnummer/derivasjonskapitlets nummer	8.1/8	5H/5	8.8/ 8	12.1/12	_____

Tabell 12: Oversikt over på hvilket klassetrinn og i hvilket kapittel grenseverdibegrepet introduseres.

Tabell 12 viser at grenseverdibegrepet introduseres i derivasjonskapitlet i alle lærebøkene, med unntak av AM der grenseverdibegrepet ikke omtales. I Sinus 1T og DAM er introduksjonen først i derivasjonskapitlet og i M1T og Sigma 1T er introduksjonen mot slutten av derivasjonskapitlet. I Sinus 1T er det et eget delkapittel på 3,5 sider om grenseverdier med forklaringstekst, eksempler og oppgaver. Forklaringen gir innsikt i hvordan funksjonsverdiene til funksjonen $f(x) = \frac{x^2+2x}{x}$ endres når x nærmer seg en viss verdi. I tillegg trekkes følgende frem om symbolet til grenseverdier: «Symbolet *lim* er en forkorting for det greske ordet limes eller det engelske ordet limit. Begge disse ordene betyr grense.» (Oldervoll et al., 2009, s. 208). Avslutningsvis kommenteres følgende: «At grenseverdien er 2, betyr at vi kan få $f(x)$ så nær 2 vi vil, bare ved å velge x nær nok 0.» (Oldervoll et al., 2009, s. 208). I resten av delkapitlet forklares metoden for å finne grenseverdier ved faktorisering og forkorting.



Figur 34: Illustrasjon i forbindelse med grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Hentet fra DAM.

I DAM introduseres grenseverdier kort i forbindelse med utledningen av grenseverdidefinisjonen av den deriverte i innledningen av derivasjonskapitlet. Der står det følgende i et «Remark»-felt i margen: «In the notation, “lim” is an abbreviation for “limit”, “$\delta x \to 0$” is an abbreviation for the phrase “δx approaches zero”, and $\lim_{\delta x \to 0} \frac{dy}{dx}$ denotes the limit of $\frac{dy}{dx}$ as δx approaches 0.» (Chow & Ling, 2010, s. 274). I tillegg er vises grenseverdier numerisk i et «Remark»-felt som vist i Figur 34.

I M1T og Sigma 1T forklares det kort om grenseverdier i delkapitlet om grenseverdidefinisjonen av den deriverte. I M1T kommer denne forklaringen helt til slutt i dette delkapitlet, og etter selve utledningen av grenseverdidefinisjonen. Hele forklaringen er som følger: «Symbolet *lim* er en forkortelse for det greske ordet *limes* eller det engelske ordet *limit*. Begge disse ordene betyr *grense*.» (Heir et al., 2014, s. 265). I Sigma 1T innledes delkapitlet om grenseverdidefinisjonen av den deriverte på følgende måte: «Vi lar $\lim_{x \to 3} x^2 - 2$ bety «grenseverdien av $x^2 - 2$ når x nærmer seg 3, er lik 7». Det vil si at når x går mot 3, vil uttrykket $x^2 - 2$ nærme seg verdien 7.» (Øgrim et al., 2013, s. 290). Det er ingen videre forklaring av grenseverdier, med unntak av to liknende eksempler, og følgende kommentar: «Da er vi klare til å definere den deriverte.» (Øgrim et al., 2013, s. 290).

Vi ser at forklaringen av grenseverdier er mest omfattende og grundig i læreboken Sinus 1T, og at den er forholdsvis grundig i DAM, sammenlignet med Sigma 1T og M1T.

Stigningstall og vekstfart

Første gang begrepet stigningstall nevnes er i forbindelse med forklaring av lineære funksjoner i de norske lærebøkene for tiende trinn og de singaporeanske lærebøkene for SEC1. Tabell 13 viser på hvilket klassetrinn stigningstallbegrepet introduseres, samt i hvilket kapittel. I tabellen er læreverk der begrepet introduseres tidligst plassert lengst til venstre.

Læreverk	**NSM**	**DM**	**Faktor**	**Sirkel**	**Grunntall**
Klassetrinn	SEC1	SEC1	10. trinn	10. trinn	10. trinn
Kapittelnummer/totalt antall kapitler i læreboken	6/15	12/16	3/7	4/5	8/9

Tabell 13: Oversikt over på hvilket klassetrinn og i hvilket kapittel stigningstallbegrepet introduseres.

Tabell 13 viser at stigningstall introduseres tre år før derivasjon introduseres i de singaporeanske lærebøkene og ett år før derivasjon introduseres i de norske lærebøkene. Når stigningstall presenteres for første gang i DM1B og NSM1, presenteres det med en generell formel, som eksempelvis i DM1B: «Gradient of a line = $\frac{rise}{run} = \frac{vertical\ change}{horizontal\ change}$» (Chow & Ling, 2007b, s. 84). En generell formel for stigningstall presenteres ikke i de norske lærebøkene for tiende trinn. I Faktor 3 forklares det at koeffisienten a i $y = ax + b$ er stigningstallet. Det forklares også, med utgangspunkt i et spesifikt eksempel, at: «(…) y øker med 2 hver gang x øker med 1. Det betyr at *stigningstallet* er 2.» (Hjardar & Pedersen, 2007,

s. 111). I Grunntall 10 forklares det at stigningstallet gir informasjon om endringen i y-verdi når x-verdien øker med 1. En lignende forklaring ser vi i Sirkel 10. I Grunntall 10, Faktor 3 og Sirkel 10 er det kun eksempler der tallet 1 brukes som endring i x-verdi når stigningstallet regnes ut.

Stigningstall omtales også i de norske lærebøkene for VG1 i kapitlet om lineære funksjoner, flere kapitler før derivasjonskapitlet. I M1T forklares det at: «Stigningstallet a viser hvor mye $f(x)$ øker når x øker med 1.» (Heir et al., 2014, s. 131). Tilsvarende forklaring finner vi i Sinus 1T og Sigma 1T. I Sinus 1T brukes tallet 1 som eneste endring i x-verdi i alle eksemplene i kapitlet om lineære funksjoner. Dette er ikke tilfellet i Sigma 1T og M1T, der en generell formel for stigningstall introduseres etter hvert i dette kapitlet.

Tabell 14 viser på hvilket klassetrinn en generell formel for stigningstall introduseres, samt i hvilket kapittel. I de singaporeanske lærebøkene ble en generell formel for stigningstall introdusert første gang begrepet ble nevnt i SEC1 (samme funn som i Tabell 13). I tabellen er læreverk der formelen introduseres tidligst plassert lengst til venstre.

Læreverk	**NSM**	**DM**	**Sigma 1T**	**M1T**	**Sinus 1T**
Klassetrinn	SEC1	SEC1	VG1	VG1	VG1
Kapittelnummer/totalt antall kapitler i læreboken	6/15	12/16	2/8 (Derivasjon i kapittel 8)	3/7 (Derivasjon i kapittel 5)	7/9 (Derivasjon i kapittel 8)

Tabell 14: Oversikt over på hvilket klassetrinn og i hvilket kapittel den generelle formelen for stigningstall introduseres.

Tabell 14 viser at den generelle formelen for stigningstall introduseres tre år før derivasjon introduseres i de singaporeanske lærebøkene og det samme året som derivasjon introduseres i de norske lærebøkene. Blant de norske lærebøkene introduseres formelen tidligere dette året i M1T og Sigma 1T enn i Sinus 1T. I M1T står det i kapitlet om lineære funksjoner at: «Noen ganger klarer vi ikke å lese av hvor mye y endrer seg når x øker med 1. (…). Vi kan da finne stigningstallet ved å regne ut brøken $\frac{økning\ i\ y}{økning\ i\ x}$.» (Heir et al., 2014, s. 135). Deretter blir følgende definisjon gitt: «En rett linje som går gjennom to gitte punkter $P_1(x_1, y_1)$, og $P_2(x_2, y_2)$, har stigningstallet $a = \frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.». (Heir et al., 2014, s. 136). Tilsvarende definisjon finner vi i kapitlet om lineære funksjoner i Sigma 1T. I Sinus 1T presenteres den generelle formelen for stigningstall i et senere kapittel i forbindelse med forklaringen av momentan vekstfart.

Tabell 15 viser på hvilket klassetrinn momentan vekstfart introduseres, samt i hvilket kapittel. I tabellen er læreverk der begrepet introduseres tidligst plassert lengst til venstre.

Læreverk	**DM**	**NSM**	**Sinus 1T**	**M1T**	**Sigma 1T**
Klassetrinn	SEC3	SEC4	VG1	VG1	VG1
Kapittelnummer/totalt antall kapitler i læreboken	5/11	2/6	7/9 (Derivasjon i kapittel 8)	5B/7 (Derivasjon i kapittel 5)	8.2/8 (Derivasjon i kapittel 8)

Tabell 15: Oversikt over på hvilket klassetrinn og i hvilket kapittel momentan vekstfart introduseres.

Vi ser av Tabell 15 at i DM introduseres momentan vekstfart ett år før derivasjon introduseres og i NSM og i alle de norske lærebøkene introduseres dette samme år som derivasjon introduseres. I Sinus 1T presenteres både gjennomsnittlig og momentan vekstfart for første gang i kapitlet rett før derivasjonskapitlet. I M1T og Sigma 1T presenteres ikke gjennomsnittlig og momentan vekstfart før i første delkapittel i derivasjonskapitlet. I alle lærebøkene presenteres momentan vekstfart som stigningstallet til tangenten gjennom et punkt på en kurve. Se delkapittel 4.2.3 for beskrivelser av hvordan Sinus 1T, Sigma 1T og M1T gjennomgår momentan vekstfart.

Funksjoner

Tabell 16 på neste side viser hvilke funksjonstyper hver lærebok inneholder. Tabellen etterfølges av en analyse av funnene.

Trinn/Bok	Faktor	Grunntall	Sirkel	NSM	DM	AM	DAM
8/SEC1	---------------------	---------------------	Lineære funksjoner: «(…) y lik x ganger et tall pluss et tall.» (Torkildsen & Maugsten, 2006, s. 160) Eksempel i læreboken: $y = 3x + 2$ Proporsjonalitet: «Når x-verdien dobles, dobles også y- verdien.» (Torkildsen & Maugsten, 2006, s. 161) Omvendt proporsjonalitet: «(…) y-verdien halvert når x-verdien blir doblet.» (Torkildsen & Maugsten, 2006, s. 162) Eksempel i læreboken: $y = \frac{50}{x}$. Kvadratfunksjoner: grafen til «$\pi \cdot r \cdot r$»	$y = mx + c$	$y = mx + b$		
9/SEC2	Graf og funksjonsuttrykk til spesifikke lineære funksjoner	$y = ax + b$	Grafisk løsning av likninger av første grad	$ax + by = k$ $y = \frac{k}{x}$ $y = ax^2 + bx + c$	$y = mx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$		
10/SEC3 +Additional Mathematics	$y = ax + b$ $y = \frac{k}{x}$ $y = x^2$	$y = ax + b$ $y = \frac{k}{x}$ $f(x) = kx^2$	$f(x) = ax + b$ $f(x) = \frac{a}{x} + b$ $f(x) = ax^2 + b$ $f(x) = x^a - 1$	$y = mx + c$	$y = \pm(x - h)^2 + h$ $y = \pm(x - p)(x - q)$ $y = ax^n$ for n $\in [-2,3]$ $y = ka^x$ for $n = -1$ og -2		
	Sinus 1T	**Aschehoug**	**Sigma 1T**				
VG1/ SEC4 +Additional Mathematics	$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ $f(x) = \frac{k}{x}$ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(x) = \frac{k}{x}$ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ $f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = a \cdot b^x$ $f(x) = a \cdot x^b$ Kombinasjoner av ulike funksjonstyper	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ $f(x) = \sqrt{x}$ Kombinasjoner av ulike funksjonstyper	$f(x) = \frac{k}{x}$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(x) = \pm(x - h)^2 + h$ $f(x) = \pm(x - p)(x - q)$ $f(x) = \frac{k}{x^2}$ $f(x) = a^x$	Repetisjon av funksjoner introdusert på tidligere trinn i «Revision»-kapitlet.	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $y^2 = ax$ $y = \|f(x)\|$ $f(x) = \sin x$ $f(x) = \cos x$ $f(x) = \tan x$ $f(x) = a\sin(bx) + c$ $f(x) = a \sin\left(\frac{x}{b}\right) + c$ $f(x) = a\cos(bx) + c$ $f(x) = a \cos\left(\frac{x}{b}\right) + c$ $f(x) = a\tan(bx)$	$f(x) = ax + b$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(x) = \frac{k}{x} + b$ $f(x) = ax^n,\ y^2 = ax$ $f(x) = \sin x,\ (x) = \cos x$ $f(x) = \tan x$ $f(x) = a\sin(bx) + c$ $f(x) = a \sin\left(\frac{x}{b}\right) + c$ $f(x) = a\cos(bx) + c$ $f(x) = a \cos\left(\frac{x}{b}\right) + c$ $f(x) = a\tan(bx)$

Tabell 16: Oversikt over hvilke funksjonstyper hver lærebok inneholder.

Tabell 16 viser at i de singaporeanske lærebøkene introduseres det generelle uttrykket for lineære funksjoner tre år før derivasjon introduseres. I Grunntall 9 introduseres dette to år før derivasjon introduseres og i Faktor 3 og Sirkel 10 introduseres dette ett år før derivasjon introduseres. I de norske lærebøkene Sirkel 8 for åttende trinn og Faktor 2 for niende trinn er det spesifikke eksempler og hverdagslige forklaringer av lineære funksjoner, uten det generelle uttrykket.

Videre viser Tabell 16 at i de singaporeanske lærebøkene introduseres det generelle uttrykket for ikke-lineære funksjoner, deriblant andregradsfunksjoner og omvendt proporsjonale funksjoner, to år før derivasjon introduseres. I de norske lærebøkene introduseres disse ikke-lineære funksjonene ett år før derivasjon introduseres.

Tabellen viser også at elevene som leser de singaporeanske lærebøkene lærer om flere og mer komplekse funksjoner før de skal lære om derivasjon enn elevene som leser de norske lærebøkene. Vi ser også en tendens til en saktere progresjon for læring av funksjoner blant lærebøkene i Norge på de første trinnene på ungdomsskolen enn tilfellet er i Singapore. Progresjonen er mer jevn mellom de singaporeanske lærebøkene for de ulike klassetrinnene. Elevene som leser de singaporeanske lærebøkene får også en lenger modningsprosess for lineære og ikke-lineære funksjoner enn elevene som leser de norske lærebøkene får.

Algebra

For å analysere forkunnskapene i algebra analyserer vi faktorisering av rasjonale uttrykk og hvor komplekse disse uttrykkene er på hvert trinn i hver lærebok. Vi har notert ned de ulike faktoriseringsteknikkene som hver lærebok inneholder, samt det vi oppfatter som det vanskeligste rasjonale uttrykket som skal faktoriseres i hver lærebok.

Trinn	Grunntall	Faktor	Sirkel	NSM	DM
8/ **SEC1**	________________	________________	____________	$ax + ay = a(x+y)$	$ax + ay = a(x+y)$ $ax + ay + bx + by = (a+b)(x+y)$
9/ **SEC2**	_________________	__________	$ax + ay = a(x+y)$ $\frac{a + a^2 - a^3}{2a}$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $cx + dy + dx + cy = (x+y)(c+d)$ $\frac{x^2 - 3xy + 2xz - 6yz}{xy - 2xz - 3y^2 + 6yz}$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\frac{4x^2 + 4xy + y^2 - z^2}{y^2 + 2yz + z^2 - 4x^2}$
10/ **SEC3**	$ax + ay = a(x+y)$ $\frac{14x^4y^3 + 7xy^5 - 28x^2y^2}{21x^3y^2}$	$ax + ay = a(x+y)$ $\frac{6a^2 + 4a}{8a}$	$ax + ay = a(x+y)$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\frac{7xyz + 21x^3y^2}{2z^2 + 6zx^2yz}$	Metoden med fullstendige kvadrater. Kun faktorisering og forkorting i et kapittel med repetisjon fra lærebøker for tidligere trinn.	

Tabell 17: Faktoriseringsteknikker og rasjonale uttrykk for forenkling i lærebøkene for åttende trinn til tiende trinn og for SEC1 til SEC3.

Trinn	Sinus 1T	Aschehoug	Sigma 1T	AM/DAM/ NSM4/DM4
VG1/ **SEC4**	$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 + 2x}$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Metoden med fullstendige kvadrater.	$\frac{x^3 + x^2 - 12x}{2x^2 - 12x + 18}$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Metoden med fullstendige kvadrater.	$\frac{2x^4 - 162}{(3x^2 + 27)(x+3)}$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ Metoden med fullstendige kvadrater.	____________

Tabell 18: Faktoriseringsteknikker og rasjonale uttrykk for forenkling i lærebøkene for VG1/SEC4.

For det første viser Tabell 17 at i de singaporeanske lærebøkene introduseres teknikken $ax + ay = a(x + y)$, for å faktorisere algebraiske uttrykk, tre år før derivasjon introduseres. I Sirkel introduseres denne faktoriseringsteknikken to år før derivasjon introduseres og i Faktor og Grunntall introduseres denne faktoriseringsteknikken ett år før derivasjon introduseres. For det andre viser tabellen at i de singaporeanske lærebøkene og i den norske læreboken Sirkel introduseres forenkling av rasjonale uttrykk to år før derivasjon introduseres. I Faktor og Grunntall introduseres dette ett år før derivasjon introduseres. For det tredje viser Tabell 17 og Tabell 18 at de singaporeanske lærebøkene for SEC3 inneholder faktorisering av rasjonale uttrykk i repetisjonsdelen, men at det ikke er noe slikt innhold i bøkene for SEC4, der derivasjon introduseres. I den forbindelse viser Tabell 18 at de norske lærebøkene for VG1 også inneholder faktoriseringsteknikker og forenkling av rasjonale uttrykk. Denne tredje tendensen viser at kunnskaper og ferdigheter kan opprettholdes og utvikles videre over to klassetrinn i begge landenes lærebøker.

Vi ser en generell tendens til at de singaporeanske lærebøkene gir lenger modningsprosess for denne delen av algebra enn de norske lærebøkene gir. Blant de norske lærebøkene gir Sirkel den lengste modningsprosessen. Vi ser også en generell tendens til at de rasjonale uttrykkene som skal faktoriseres er av høyere vanskelighetsgrad i de singaporeanske lærebøkene enn i de norske lærebøkene. Følgende løsningsforslag av det vanskeligste uttrykket vi fant blant de singaporeanske lærebøkene for SEC2 og de norske lærebøkene for tiende trinn viser forskjellen i vanskelighetsgrad:

NSM2	Grunntall 10
$\frac{x^2 - 3xy + 2xz - 6yz}{xy - 2xz - 3y^2 + 6yz} =$ $\frac{x(x-3y) + 2z(x-3y)}{y(x-3y) - 2z(x-3y)} =$ $\frac{(x-3y)(x+2z)}{(x-3y)(y-2z)} =$ $\frac{(x+2z)}{(y-2z)}$	$\frac{14x^4y^3 + 7xy^5 - 28x^2y^2}{21x^3y^2} =$ $\frac{7xy^2(2x^3y + y^3 - 4x)}{21x^3y^2} =$ $\frac{2x^3y + y^3 - 4x}{3x^2}$

Tabell 19: Løsningsforslag for det vanskeligste uttrykket vi fant blant de singaporeanske lærebøkene for SEC2 og de norske lærebøkene for tiende trinn.

Faktoriseringsteknikken $ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y)$, som brukes for å forenkle uttrykket fra NSM2, er mer avansert enn teknikken $ax + ay = a(x + y)$, som brukes for å forenkle uttrykket fra Grunntall 10 (se Tabell 19).

5 Diskusjon

Dette kapitlet inneholder diskusjon av funn fra analysen i kapittel 4 i lys av teori fra kapittel 2. Diskusjonen er strukturert etter de tre forskningsspørsmålene om formidlingen og oppgavene i lærebøkenes derivasjonskapittel, samt forkunnskapene fra tidligere trinn. Se vedlegg nummer 1 og 2 for oversikt over hvilke lærebøker som tilhører hvilke land, samt forkortelser for lærebøkene.

5.1 Hvordan formidles emnet derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene?

5.1.1 Lærebøkenes oppbygning

Dette delkapitlet omhandler diskusjon av læringsmodellene i lærebøkene og hvordan de kan påvirke elevenes muligheter til å lære. I tillegg skal vi diskutere lærebøkenes struktur med tanke på elevenes læring.

Hvilken rolle spiller lærebøkenes læringsmodell for muligheten til å lære derivasjon?

Funn fra kvalitativ analyse av lærebøkenes derivasjonskapittel viser tydelige forskjeller i lærebøkenes læringsmodell. Vår oppfatning er at modellen i de singaporeanske lærebøkene samsvarer best med «activities-cours-excercises»-modellen, mens modellen i de norske lærebøkene kan beskrives best med «exposition-examples-excercises»-modellen (se side 5 for forklaring av modellene). De norske og singaporeanske lærebøkene inneholder imidlertid enkelttilfeller og elementer fra den andre modellen også. Forskjellen mellom læringsmodellene kan gi ulike læringsopplevelser, og det kan dermed tenkes at elevene får ulike muligheter til å lære derivasjon av å lese de to landenes lærebøker. Elevene som leser AM og DAM får mulighet til å utforske de matematiske sammenhengene og oppdage hvilken generell regel eller sammenheng som gjelder i «activities»-delen. Å se etter sammenhenger innebærer å knytte ulike deler av matematikken sammen, både tidligere og nylig ervervet kunnskap. I tillegg til den muligheten elevene får til å konstruere kunnskapen selv, kan dette tenkes å øke relasjonell forståelse. «Cours»-delen kan også bidra til å øke denne typen forståelse. Funn fra analysen viser i den forbindelse at forklaringene i «cours»-delen ofte inneholder referanser til utforskningsoppgavene fra «activities»-delen. Det gjør elevene til aktive lesere og kan gjøre «cours»-delen mer lesevennlig. «Activities-cours-excercises»-modellen inneholder også muligheter for å øke elevenes instrumentelle forståelse gjennom eksempler i «cours»-delen og oppgaver i «excercises»-delen.

Fokuset på øking av instrumentell og relasjonell forståelse i «exposition-examples-excercises»-modellen i de norske lærebøkene, er derimot mer skjev. Våre funn viser større vekt av forklaringer som kan bidra til å øke relasjonell forståelse i «exposition»-delen og mest fokus på forklaringer som kan bidra til å øke den instrumentelle forståelsen i «examples»-delen. Når elever leser «exposition»-delen er vårt inntrykk at de er mer passive lesere enn lesere av «cours»-delen i den andre modellen. Denne passiviteten kan gjøre «exposition»-delen vanskelig å lese, og det kan da tenkes at elever fokuserer mer på eksemplene og lar være å lese forklaringene i «exposition»-delen. Elevene kan dermed miste en mulighet til å øke den relasjonelle forståelsen ytterligere.

En annen begrunnelse for at ulike læringsmodeller kan gi ulike muligheter til å lære derivasjon, er modellenes bidrag til elevenes motivasjon. «Activities»-delen gjør elevene aktive i egen læringsprosess, og elevene får i henhold til Hovik (2006) et *eierforhold* til egen kunnskap når denne konstrueres på egenhånd. Den tidligere nevnte passiviteten som elevene kan oppleve som lesere av «exposition»-delen, gir ikke et slikt eierforhold til kunnskapen. Et mer bevisst forhold til egen kunnskap og læring kan gjøre læringen mer meningsfull for elevene, og dermed øke deres motivasjon for videre læring. «Activities»-delen i AM og DAM spiller her en motiverende rolle for elevene. For størst effekt på elevenes motivasjon, er det imidlertid viktig at rekkefølgen mellom «activities»-delen og «cours»-delen er som i navnet på den tilhørende modellen. I DAM (se side 76) kommer én av utforskningsoppgavene etter en forklaringstekst som inneholdt «fasiten» for det som skulle utforskes i «activities»-delen. Da får ikke elevene samme mulighet til å konstruere kunnskapen selv, fordi den allerede er «konstruert» i forklaringsteksten. I henhold til Solvang (1992) kan dette svekke elevenes følelse av å oppdage noe nytt, og utforskningen kan virke mindre motiverende.

Lærebøkenes struktur

Funn fra analysen viser en ulik tetthet av bilder relativt til antall sider i lærebøkene (se side 44). Bilder i lærebøkene kan gi et lystbetont, fargerikt og variert preg på lærestoffet. Dette kan tenkes å øke elevenes motivasjon i læringsprosessen. Vår oppfatning er imidlertid at for mange bilder kan trekke fokuset vekk fra det viktigste i innholdet, virke forstyrrende på elevenes konsentrasjon og være kognitivt belastende. I tillegg kan mye farger og mange bilder gi inntrykk av et enkelt lærestoff, og dermed demotivere elevene dersom vanskelighetsgraden viser seg å være høyere enn antatt. Når det gjelder lærebøkenes layout, ser vi at Sigma 1T er forskjellig fra de andre lærebøkene. I Sigma 1T er det mye tekst og mange bilder, eksempler og oppgaver i de ulike fargede boksene, tett i tett, i de tosiders delkapitlene (se side 46). For enkelte elever kan en slik tettpakning av lærestoffet virke kognitivt belastende, mens for andre kan dette være oversiktlig. Fordelen med den strukturen vi generelt ser i de andre lærebøkene, er at mer plass til lærestoffet kan gi økt ro i lesingen, samt mer tid til fordyping og modning av lærestoffet.

Lærebøkenes innledning til derivasjonskapitlet

Analysen av lærebøkenes innledning til derivasjonskapitlet viste at lesing av innledningene i AM, DAM og Sigma 1T kan være mer motiverende enn lesing av innledningene i M1T og Sinus 1T (se delkapittel 4.2.3). Det er flest *motiverende elementer* i AM, DAM og Sigma 1T, men disse kan, etter vår mening, ha ulik effekt på motivasjonen. I innledningen av kapitlet i Sigma 1T og AM er det en kort historisk bakgrunn, men beskrivelsene er tilsynelatende overfladiske. En mer detaljert og levende beskrivelse kan motivere elevene ved at de får større mulighet til å sette seg inn i menneskenes historiske behov for å oppdage denne delen av matematikken (Jankvist, 2009; Mellin-Olsen, 1981). I AM, DAM og Sigma 1T er det også en kort beskrivelse av anvendelser av derivasjon. I Sigma 1T kunne denne beskrivelsen vært mer detaljert med konkrete eksempler for å vise matematikkens nytteverdi og gjøre elevene interesserte. I innledningen i derivasjonskapitlene i AM og DAM er det noen slike konkrete eksempler på praktiske anvendelser, og i følge Okeeffe (2013) kan slikt motivere elevene ytterligere. Anvendelsen av derivasjon i forbindelse med produksjon av hermetikkbokser i DAM er et godt eksempel på dette, fordi det kan vekke nysgjerrighet og et ønske om å lære den aktuelle matematikken. (se side 62).

I innledningen av derivasjonskapitlet i alle lærebøkene, med unntak av M1T, er det læringsmål og metatekst (se delkapittel 4.2.3). Læringsmål og metatekst gir oversikt og forbereder elevene på hva som kommer. Det kan virke motiverende ved å gi en forståelse for hensikten med hvert enkelt delkapittel i forbindelse med læring av derivasjon. Dette gjelder spesielt for elevene som leser Sigma 1T der det er læringsmål i innledningen av hvert eneste delkapittel (se side 46). Vårt inntrykk er at den uvissheten som lesere av M1T opplever, uten innsikt i læringsmål og uten metatekst, kan virke demotiverende. I M1T kan det første delkapitlet om gjennomsnittlig vekstfart gi en «brå» start for lesing av kapitlet, fordi elevene mangler sammenheng og forståelse av behovet for å lære det nye.

Alt i alt er motivasjon gjennom lesing av innledningen til derivasjonskapitlet viktig for elevenes mulighet til å lære, fordi det er deres første møte med derivasjon. Innledningen vil gi elevene et inntrykk av i hvilken grad derivasjon vil interessere dem. I tillegg kan lesing av innledningen vekke elevenes nysgjerrighet og skape en kontekst og meningsfullhet for det de skal lære, og det kan i henhold til Solvang (1992) virke motiverende. Da spiller motivasjonen en stor rolle for å gi arbeidslyst til å møte utfordringene i derivasjonskapitlet. Det kan også virke motiverende for elevene å vite hva de skal jobbe mot og hva de skal ha lært når de er ferdig med kapitlet. Da vil lærestoffet virke mer overkommelig for elevene og øke selvtilliten deres.

5.1.2 Forklaringer

I dette delkapitlet skal vi diskutere momenter fra analysen av forklaringene i derivasjonskapitlene, samt hvilken mulighet disse gir elevene til å lære derivasjon. I tillegg skal vi peke på hvilke typer forståelse disse forklaringene kan bidra til å øke.

Hvilken rolle spiller flere ulike forklaringer av det samme emnet i lærebøkene for muligheten til å lære derivasjon?

Under arbeidet med analysen kom vi over to tilfeller der den samme matematiske idéen eller begrepet ble forklart på minst to ulike måter i samme lærebok. Det ene tilfellet gjelder forklaring av stasjonære punkter. I alle lærebøkene ble stasjonære punkter forklart som punkter der den deriverte har verdi lik null. I M1T og AM ble disse punktene også forklart som strengt større enn eller strengt mindre enn nabopunktene i en omegn om punktet (se side 54 og side 63). Denne siste forklaringen bidrar til å forklare hvorfor randpunkter også regnes som stasjonære punkter. I begge disse lærebøkene tydeliggjøres imidlertid ikke denne sammenhengen mellom randpunkter og stasjonære punkter, og det kan svekke denne forklaringen. Elevene kan få en bedre forståelse av og et bredere bergrepsbilde for stasjonære punkter ved å lese forklaringen med utgangspunkt i nabopunktene ettersom den deriverte ikke nødvendigvis er null i randpunkter.

Det andre tilfellet gjelder fortegnslinjer. Av alle lærebøkene gir M1T det mest nyanserte bildet av fortegnslinjer (se side 53). Med fremstilling av fortegnslinjer fra tre ulike utgangspunkt, kan elevene få et bredere begrepsbilde med økt instrumentell og relasjonell forståelse. Elevene får se sammenhengen mellom de tre ulike utgangspunktene for fortegnslinjene, og forskjellene og likhetene mellom disse kan gi økt forståelse for hvert av de tre enkelttilfellene.

Hvilken rolle spiller visualiseringer i lærebøkene for muligheten til å lære derivasjon?

I analysen så vi en generell tendens til visualiserende forklaringer i alle lærebøkene. Den typiske visualiseringen bestod av en graf med en forklaringstekst. I forklaringen av emnet momentan vekstfart, var denne typen visualiserende forklaring relativt lik i lærebøkene (se eksempelvis Figur 10 på side 50). Etter vår mening gir imidlertid DAM et bedre bilde av momentan vekstfart (se side 65, Figur 24). Der illustreres hele prosessen med flytting av et punkt med inntegnede sekanter som blir brattere og brattere, og som etter hvert blir til en tangent. Denne oppfyller det Sfard (1991) omtaler som hensikten med visualisering ved å konkretisere en abstrakt matematiske idé og skape et mentalt bilde av matematikken hos elevene. Dette kan tenkes å øke elevenes relasjonelle forståelse og ha en positiv påvirkning på elevenes indre tale. Visualisering av matematikk kan også være et virkningsfullt supplement til beskrivelser av matematikk i forklaringstekster. Dette oppfatter vi er tilfellet i DAM der forskjellen mellom globalt toppunkt og lokalt toppunkt kommer tydelig frem på grunn av Figur 27 på side 68.

Videre oppfatter vi at en visuell forklaring kan gjøre det enklere å huske matematikken. Med bildet av momentan vekstfart i DAM, sammen med forklaring av grenseverdidefinisjonen av den deriverte, kan det tenkes at det blir enklere både å forstå og huske grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Berg- og dalbaneanalogien knyttet til funksjonsdrøfting i AM (se side 63) kan også gjøre det enklere for elevene å huske sammenhengen mellom fortegnet til den deriverte og der grafen øker og avtar. Denne sammenhengen kan også bli enklere å huske ved lese teksten i «Mathsfun»-feltene i DAM (se side 68). Disse kan skape konkrete bilder av matematikken ved å knytte inn den økende høyden til en baby og den avtagende intensiteten til lys.

Analysen viste også tegn til visuelle forklaringer der selve bildet i læreboken ikke var hovedhensikten, men der hensikten var å la elevene skape det mentale bildet selv. En slik forklaring finner vi i Sigma 1T der regler for derivasjon av en sum av funksjoner og en funksjon multiplisert med en konstant illustreres med hunders vekst (se side 58). Selve bildet av hundene i læreboken hjelper ikke på forståelsen eller den indre talen, men det å relatere den abstrakte matematikken til noe kjent og situasjonen med hundene som vokser, kan gi økt forståelse.

Videre ser vi av analysen at det oppfordres til bruk av visualiseringer for å løse en matematikkoppgave i et eksempel i DAM (se side 70). Løsningsmetoden inkluderer tegning av figurer, både to- og tredimensjonale, og visualiseringen brukes dermed som et hjelpemiddel i problemløsningen slik Zimmermann og Cunningham (1991) trekker frem. Det kan gjøre det enklere å tenke, vurdere og systematisere opplysningene i oppgaveteksten. Etter vår oppfatning kan dermed muligheten til å lære derivasjon styrkes av slike bidrag til strategi for løsning av matematikkoppgaver.

Hvilken rolle spiller eksemplifiseringer i lærebøkene for muligheten til å lære derivasjon?

Den kvantitative analysen viste at Sigma 1T inneholder flest eksempler (se Tabell 10 side 44). Mange eksempler kan, i henhold til Niss (2006), gi elevene et bredere begrepsbilde. Dette gjelder særlig dersom eksemplene viser begrepet fra ulike sider og knytter inn aspekter som ellers kunne ledet til misoppfatninger hos elevene. En ulempe med mange eksempler er derimot at det kan føre til økt bruk av imiterende resonnementer, og dermed gi økt fokus på instrumentell forståelse fremfor relasjonell forståelse. Vi ser imidlertid en tendens til forklaringer av matematikken i flere eksempler i alle lærebøker. Det gir dermed elevene som leser de norske lærebøkene en mulighet til økt relasjonell forståelse med tanke på at «exposition-examples-exercises»-modellen kan gjøre at elevene kun leser eksemplene. Videre kan forklaringene og beskrivelsene av løsningsstrategi i «Analysis» i flere av eksemplene i DAM gi elevene økt instrumentell forståelse, noen ganger også relasjonell forståelse, til å løse oppgaver i fremtiden (se side 67). Dette anser vi dermed som et bedre alternativ til eksempler der kun beregningen er presentert. Analysen viste også at det finnes eksempler i DAM som kan gi økt relasjonell forståelse. I et slikt eksempel fikk elevene følgende spørsmål: «Can we express r in terms of h in (1) and then substitute r into (2) to solve the problem?» (Chow & Ling, 2010, s. 335)**.** Her er (1) og (2) henholdsvis uttrykk for volum og overflateareal av en sylinder (se side 70). Da får elevene reflektert over hvorvidt utledningen i eksemplet samsvarer med matematikken.

Fra analysen så vi en tendens til større variasjon blant eksemplene i de singaporeanske lærebøkene ved at lærestoffet knyttes til flere ulike kontekster (se side 78). Dette er positivt for forståelsen og kan gi flere assosiasjoner til lærestoffet slik at en også husker det bedre. Videre har lærebøkene flere ulike typer eksempler som kan, på hver sin måte, gi økt forståelse. De numeriske eksemplifiseringene i Sigma 1T kan gi bredere begrepsbilde ved at elevene får se et numerisk mønster (se side 58). De praktiske eksemplene bidrar i stor grad til å relatere matematikken til noe elevene har kjennskap til. I tillegg kan elevenes indre motivasjon, som i følge Solvang (1992) er viktig for læring på lengre sikt, økes av praktiske eksempler om anvendelser av matematikken. I AM og DAM er de praktiske eksemplene i større grad knyttet til yrkesliv enn i de andre lærebøkene. Elevene kan da få erfaringer med hvor nyttig matematikk er, og det tilfører en meningsfullhet og nysgjerrighet til læring av matematikken.

Eksemplifiseringer i lærebøkene viser seg også gjennom de mange forklaringene av typen *spesifikk til generell forklaring.* Med bakgrunn i teori om hvordan matematikk har blitt oppdaget gjennom historien (Jankvist, 2009), kan det tenkes at denne forklaringsmåten passer menneskers læringsprosess på en god måte.

Hvilken rolle spiller bevis i lærebøkenes forklaringer for muligheten til å lære derivasjon?

Generelt er det få matematiske bevis i lærebøkenes derivasjonskapittel. I DAM kommenteres mangelen på bevis i henhold til det fastsatte pensumet som ikke går så dypt inn i matematikken. Det kan tenkes at denne forklaringen også gjelder for de andre matematikklærebøkene i utvalget vårt. De få bevisene som er med er i all hovedsak knyttet til grenseverdidefinisjonen av den deriverte, og det er kun i Sigma 1T at en derivasjonsregel bevises. Beviset i Sigma 1T kan motivere ved å gi økt relasjonell forståelse for matematiske sammenhenger og hvorfor matematikken er som den er.

En mulig kompensasjon for få matematiske bevis i lærebøkene, er oppgaver knyttet til den induktive metoden. Slike aktiviteter inngår i læringsmodellen i de singaporeanske lærebøkene, men det finnes enkelttilfeller av oppgaver knyttet til den induktive metoden i de norske lærebøkene også. Disse oppgavene kan tenkes å ha liknende virkning på læringsprosessen som erfaring med matematiske bevis har (se delkapittel 2.4.1 og 2.4.4). Årsaken er at induktive oppgaver kan gi elevene mulighet til å se «maskineriet» bak matematikken og gi økt forståelse. Hanna (2001) trekker frem at begge disse momentene er positive aspekter i forbindelse med læring av matematiske bevis.

Et bevis som er med i alle lærebøkene, med unntak av AM, er beviset for grenseverdidefinisjonen av den deriverte. Lite vektlegging av dette beviset i AM, i tillegg til hvor beviset er plassert i de andre lærebøkenes derivasjonskapittel, kan sende signaler om bevisets relevans i derivasjonsteorien. I Sinus 1T og DAM er beviset en del av innføringen av derivasjonsbegrepet (se henholdsvis side 47 og side 65), og det understreker viktigheten av bevis i større grad enn tilfellet der beviset er plassert til slutt i derivasjonskapitlet, som i M1T og Sigma 1T (se henholdsvis side 50 og side 56). Med slik variasjon i plasseringen mellom lærebøkene, mener vi at lærer-elev-lærebok-samspillet (Herbjørnsen, 1999) kan være en viktig faktor for å sikre at bevisets relevans i matematikkopplæringen kommer tydelig frem.

Plasseringen av beviset mot slutten av derivasjonskapitlene i Sigma 1T og M1T kan gi en oppfatning av bevis som ekstramateriale for «spesielt interesserte». Dette kan føre til at elever dermed ikke leser beviset, fordi det kommer ut av sammenheng fra forklaringen av derivasjonsbegrepet. Denne plasseringen kan imidlertid være et forsøk på differensiering av lærestoffet. Grenseverdidefinisjonen av den deriverte er abstrakt og kan være vanskelig å forstå. Det kan derfor hende at erfaringer med kun den grafiske tolkningen av derivasjonsbegrepet, slik det introduseres i Sigma 1T, M1T og AM, er tilstrekkelig for elever som sliter med abstrakt matematikk.

Plasseringen av beviset i introduksjonen av derivasjonsbegrepet i Sinus 1T og DAM kan virke positivt på læringsprosessen. Selv om elevene kan ha vanskeligheter med å forstå grenseverdidefinisjonen med en gang, kan denne gi elevene en forståelse av at derivasjon er knyttet til grenseverdier og vekstfart. Det kan derfor tenkes at sammenhengen mellom disse matematiske begrepene kommer tydeligst frem i Sinus 1T og DAM. Det kan også tenkes at elever som leser Sinus 1T og DAM blir mer bevisste på hvorfor derivasjonsreglene er som de er. Totalt sett kan dette øke den relasjonelle forståelsen. Elevene som leser Sinus 1T og AM får i tillegg en lenger modningsprosess for grenseverdidefinisjonen, og større mulighet til å oppnå reifikasjon tidligere enn elevene som leser Sigma 1T, M1T og AM.

Videre er det flere ulikheter mellom lærebøkenes bevis av grenseverdidefinisjonen av den deriverte. For det første kan forklaring av forkunnskapen grenseverdier lette lesingen av beviset. I Sinus 1T er denne gjennomgangen grundig, i DAM er denne gjennomgangen litt mindre grundig, mens den i M1T og Sigma 1T er mindre fullstendig. Analysefunn fra M1T, om at begreper og symboler knyttet til teori om grenseverdier ikke forklares før etter beviset, støtter dette. Det er også et større fokus på å fremme instrumentell fremfor relasjonell forståelse i beviset i både M1T og Sigma 1T. Eksempelvis gir en trepunkts «metode» for beviset i M1T et slikt metodisk fokus (se side 51). I Sigma 1T inneholder beviset en kommentar om at Δx alltid skal kunne trekkes utenfor i telleren (se side 57). Denne kommentaren kan føre til misoppfatninger, fordi elever kan tolke at en kan faktorisere ut Δx når en anvender grenseverdidefinisjonen av den deriverte på alle funksjonstyper. I virkeligheten gjelder dette kun polynomfunksjoner.

Hvilken rolle spiller motiverende begrunnelser i forklaringene?

For å begrunne hvorfor elevene skal lære matematikken, har enkelte av lærebøkene med *motiverende begrunnelser*. Dette er ingen sterk tendens i lærebøkene i vårt utvalg, men de som er med kan virke positivt på elevenes motivasjon. Hovedsakelig peker disse begrunnelsene på at de tidligere matematiske metodene som elevene har lært er tidkrevende og kan gi unøyaktige resultater. En slik kommentar i introduksjonen av en ny matematisk idé kan gjøre det mer attraktivt å lære denne. Det kan tenkes at slike begrunnelser også vil fungere godt ovenfor ytre motiverte elever. Et eksempel på en slik begrunnelse er innføring av derivasjon som en mindre tidkrevende og mer nøyaktig måte å finne stigningstallet til tangenter på enn ved å tegne tangentene for å lese av stigningstallet. Denne begrunnelsen finner vi både i AM og DAM (se side 61 og side 64). En annen type motiverende begrunnelse er knyttet til motivasjon ved bruksverdi (Solvang, 1992). I M1T er det flere tilfeller med bemerkninger om hvilke forkunnskaper som inngår i det nye lærestoffet. Det kan få elevene til å oppdage nytteverdien ved det de har lært tidligere, som i følge Solvang (1992) kan føre til økt motivasjon. En tredje type motiverende begrunnelse omhandler nytteverdi av matematikkunnskapen i forbindelse med å oppnå gode resultater. En slik begrunnelse finner vi i M1T der det motiveres for læring for å oppnå gode resultater på eksamen (se side 52). Dette kan motivere ytre motiverte elever (Solvang, 1992).

5.1.3 Matematisk språk

Dette delkapitlet omhandler diskusjon av hvordan det matematiske språket i lærebøkene kan påvirke elevenes muligheter til å lære derivasjon, både med tanke på utvikling av elevenes eget matematiske språk og hvordan dette språket kan lede til forståelse.

Et rikt matematisk språk med mange begreper og symboler

For et rikt matematisk språk og for evnen til å benytte matematisk terminologi er det viktig med erfaringer med matematiske symboler og begreper. Lærebøker er én kilde til dette, og kan blant annet berike elevenes matematiske språk med utheving av begreper og symboler. Vi ser størst tendens til utheving med ulik skrivestil og farger i AM, DAM, M1T og Sinus 1T (se side 46). Elevene kan legge bedre merke til begrepene og symbolene som er uthevet, og sjansen for at de bruker dem i eget matematisk språk øker. En slik utheving mangler imidlertid under presentasjon av grenseverdidefinisjonen av den deriverte i M1T. Der presiseres det ikke hva som er selve grenseverdidefinisjonen av den deriverte (se side 51). Dette kan medføre at elevene ikke benytter seg av begrepet.

Videre kan lærebøkene være en kilde til berikelse av elevenes matematiske språk ved bred bruk av begreper og symboler. Innholdsanalysen viser en bred begrepsbruk blant alle lærebøkene under forklaring av derivasjonsbegrepet og derivasjonsregler (se kapittel 4.2.3). AM har imidlertid en noe bredere begrepsbruk med navnsetting av derivasjonsregler, som for eksempel «Addition/Subtraction Rule» (se side 62). Forskjellene mellom det matematiske språket i lærebøkene kommer tydeligere frem i presentasjon av funksjonsdrøfting. Der er det færre begreper i Sigma 1T og Sinus 1T enn i de andre lærebøkene. Blant annet utelukkes begrepet terrassepunkter i Sinus 1T. Det kan tenkes at bruk av begrepet kunne gitt bredere begrepsbilde av stasjonære punkter, samt hindret en mulig misoppfatning om forskjellen mellom disse punktene (se side 48). I M1T introduseres hele 17 begreper under funksjonsdrøfting, noe som kan gi en bredere begrepsbruk blant elevene.

I AM, DAM og Sinus 1T er det generelt sett bredere symbolbruk i definisjoner og i teksten enn i de andre lærebøkene. Det kan tenkes at denne symbolbruken gir leserne en bedre forutsetning for forståelse av symbolene i andre kontekster, og at de dermed får økt mulighet til å lære derivasjon. Introduksjon av flere ulike symboler for det samme begrepet kan også gi bredere symbolbruk blant elevene. I AM og DAM er det eksempelvis tre ulike notasjoner for den deriverte (se henholdsvis side 61 og side 65). Dette kan utvide elevenes begrepsbilde av derivasjon ettersom symbolene representerer ulike sider ved begrepet. I M1T er innholdet i flere av de uthevede feltene skrevet med ord i steder for symboler (se side 52). Det kan tenkes at elevenes oppmerksomhet rettes mot de uthevede feltene, og at elevene dermed stort sett leser forklaringer med lite symbolbruk i M1T. Dette kan gå utover deres matematiske språk. Videre kan lite symbolbruk i Sigma 1T og M1T gjøre elevene mindre vant med å bruke symboler.

Et rikt matematisk språk med forståelse for begreper og symboler

Et rikt matematisk språk krever også en grunnleggende forståelse for begrepene (Botten, 1999). Dersom begrepene forklares på en god måte, og dersom elevene får tid til å bli kjent med begrepene, kan muligheten for å oppnå reifikasjon økes. Dette vil gi en mer effektiv skjemastruktur og dermed større kognitiv kapasitet til tilegnelse av ny matematikkunnskap (Sfard, 1991). Fra dette perspektivet kan introduksjon av hele 17 begreper under funksjonsdrøfting i M1T virke mot sin hensikt, spesielt fordi ikke alle begrepene forklares på en tilstrekkelig måte. Det kan tenkes at elevene ikke rekker å jobbe lenge nok med alle begrepene og at muligheten til å oppnå en strukturell oppfatning av begrepene reduseres. I tillegg kan dette føre til at informasjonsmengden blir for stor i forhold til den tilgjengelige kognitive kapasiteten. Alt i alt kan dette hindre begrepsutviklingen.

Det er også viktig for begrepsutviklingen og forståelse for prosedyrer at de matematiske symbolene forklares på en forståelig måte. Innholdsanalysen, se kapittel 4.2.3, viser at symboler forklares stort sett i alle lærebøkene før de brukes, men med noen unntak. I M1T forklares for eksempel grenseverdisymbolet etter bruk av dette symbolet i utledningen av grenseverdidefinisjonen av den deriverte (se side 51). Dette kan tenkes å gi et svekket læringsutbytte.

Vi har diskutert nødvendigheten av matematiske begreper og symboler og at disse må forklares for et rikt matematisk språk. I den forbindelse kommer det matematiske språkets to motstridende behov frem. Det ene er behovet for presise fagbegreper i matematikkspråket. Det andre er behovet for hverdagslige forklaringer av matematikken slik at det matematiske språket ikke blir et hinder for elevenes læring (Botten, 1999; Pierce & Fontaine, 2009). Begge behovene må vektlegges og ikke utelukke hverandre. Det kan i den forbindelse være fordelaktig for elevenes læring at begreper, regler og definisjoner forklares med et mindre formelt språk, i tillegg til at presise begreper og matematiske symboler benyttes i forklaringene. I M1T (se side 52) forklares for eksempel regler og definisjoner både med ord og symboler, og det kan øke både relasjonell og instrumentell forståelse. I Sigma 1T og DAM presenteres derivasjonsreglene både med symboler og et hverdagslig språk. Et eksempel er som følger i Sigma 1T: «Den generelle regelen gjelder veksten av en sum, $f(x) = u(x) + v(x)$. Her blir den samlede veksten lik summen av vekstene, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Det vil si at vi kan derivere ledd for ledd.» (Øgrim et al., 2013, s. 284) (se side 59). Den siste setningen i dette sitatet kan gjøre det enklere for elevene å huske reglene, samt øke forståelsen for symbolene i reglene og den instrumentelle forståelsen for prosedyren. Bruk av hverdagslig språk i forklaringer av matematiske regler kan også øke elevenes relasjonelle forståelse. Et eksempel som illustrerer dette er som følger i Sigma 1T: «Grafen til en konstant funksjon verken stiger eller faller. Den har nullvekst overalt, det vil si at den deriverte er lik null for alle verdier av x.» (Øgrim et al., 2013, s. 282) (se side 57).

Det er i tillegg visse aspekter ved matematiske begreper og symboler som kan føre til misoppfatninger av matematikken, og forklaringene i lærebøkene bør derfor hindre dette. En forklaring som kan hindre misoppfatninger er som følger i AM: «$\frac{dy}{dx}$ is not dividing dy by dx» (Yeo, Teh, Loh, & Ivy, 2013, s. 339) (se side 61).

Hvilken rolle spiller et rikt matematisk språk for muligheten til å lære derivasjon?

Det kan tenkes at et rikt matematisk språk påvirker muligheten til å lære med en positiv påvirkning på elevenes indre tale ved å gi bedre verktøy for tenking. I tillegg til tilstrekkelig forståelse av matematiske begreper og symboler, kan en forbedret indre tale gi elevene økt forståelse for matematikken. Det er i den forbindelse også viktig at uttalen av begrepene og symbolene forklares. For eksempel kan riktig uttale av $f'(x)$, som spesifiseres i M1T og Sigma 1T, føre til at elevene knytter riktig meningsinnhold til symbolet. De kan derfor også få en bedre forståelse for når de skal bruke symbolene. Noen av lærebøkene legger også opp til at elevene må bruke symboler og begreper i diskusjonsoppgaver. Dette gir læreren mulighet til å undersøke om elevene uttaler symbolene riktig, om de brukes i riktige sammenhenger og om de har koblet meningsinnholdet til symbolet. Her ser vi viktigheten av lærer-elev-lærebok-samspillet som (Herbjørnsen, 1999) trekker frem.

Generelt språk og formuleringer i lærebøkene

Det generelle språket i lærebøkene er også viktig for muligheten til å lære, og formuleringer kan føre til misoppfatninger. Et slikt eksempel er bruken av «det er vanlig» i forklaringen av sammenheng mellom momentan vekstfart og derivasjon i M1T: «(…) Da er det vanlig å kalle den momentane vekstfarten i et punkt for den deriverte i dette punktet.» (Heir et al., 2014, s. 232) (se side 50). Samme type formulering finner vi i Sigma 1T: «Husk at den deriverte bare er et forkortet navn på den momentane vekstfarten.» (Øgrim et al., 2013, s. 280) (se side 56). I disse to formuleringene er det ikke helt tydelig at den momentane vekstfarten i et punkt faktisk er den deriverte i dette punktet. Dette kan gi en begrenset forståelse av hva den deriverte representerer. Et annet eksempel på en formulering som kan føre til misoppfatninger er følgende i Sigma 1T: «Hvor raskt vokser solsikken etter ti dager?» (Øgrim et al., 2013, s. 278) (se side 55). Bruken av ordet «etter» gjør at elevene kan oppfatte dette som å finne ut hvor raskt den vokser fra og med den tiende dagen, og ikke bare veksten i løpet av den tiende dagen. Dette kan tenkes å føre til en misoppfatning om tolkningen av den deriverte.

5.1.4 Faglig innhold i lærebøkene

I dette delkapitlet skal vi drøfte i hvilken grad læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T er dekket av det faglige innholdet i lærebøkene. I tillegg skal vi drøfte faglige ulikheter mellom lærebøkene, hva dette har å si for elevens læringsmuligheter og komme med antakelser om hvordan lærebokforfatterne har tenkt i forbindelse med prioritering av det faglige innholdet.

Hvilken rolle spiller det faglige innholdet i lærebøkene for muligheten til å lære derivasjon?

Det faglige innholdet er generelt sett likt i alle lærebøkene og dekker læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T på en tilstrekkelig måte. Analysefunn viser imidlertid flere tilfeller av *mindre fullstendige forklaringer* som blant annet skyldes at visse deler av det faglige innholdet er utelukket. Dette kan tenkes å påvirke muligheten til å lære derivasjon. For det første er terrassepunkt og randpunkter to begreper som ikke alle lærebøkene har med, og som vi anser som sentrale i derivasjonspensumet (se kapittel 2.9). M1T er eneste lærebok i utvalget som har med begrepet randpunkter (se side 54). Utelukking av dette begrepet kan gjøre elevenes begrepsbilde av stasjonære punkter mindre komplett. Denne mangelen på faglig innhold kan føre til feil på eksamensoppgaver der inkludering av randpunkter gir full uttelling (Utdanningsdirektoratet, 2015) (se kapittel 2.9). Utelukking av begge begrepene kan, som nevnt under diskusjon av matematisk språk, også ha konsekvenser for det matematiske språket og elevenes forståelse. En mulig forklaring for hvorfor enkelte av lærebøkene har utelukket visse deler av det faglige innholdet, kan være et bevisst valg om å redusere den kognitive belastningen for elevene. Enkelte faglige begreper kan være unødvendig komplisert for elevene, og dermed ta fokuset vekk fra de sentrale delene ved derivasjonsteorien. Dette kan være tilfellet i M1T der alle de 17 begrepene ikke nødvendigvis er like viktige og relevante. I tillegg kan unødvendig komplisert innhold i lærestoffet virke demotiverende på elevene.

Videre spesifiseres det i læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T at elevene skal bruke grenseverdidefinisjonen av den deriverte til å utlede en derivasjonsregel (se side 45). I Sinus 1T oppfylles dette med en oppgave der elevene skal bruke grenseverdidefinisjonen til å utlede derivasjonsreglene for en sum av funksjoner og en funksjon multiplisert med en konstant (se side 72). I Sigma 1T bevises derivasjonsregelen for funksjoner av typen $f(x) = x^n$, med bruk av grenseverdidefinisjonen. I M1T, AM og DAM bevises ingen derivasjonsregler. Grenseverdidefinisjonen av den deriverte er heller ikke med i AM, og gir dermed ikke samme muligheten til å lære derivasjon. En mulig forklaring på denne mangelen er et større fokus på grenseverdier senere på Junior College. Et fokus på reifikasjon og modningsprosess kan ligge til grunn for at bare den grafiske tolkningen og det metodiske knyttet til derivasjon er med i AM. Dette støtter vår antakelse om at spiralprinsippet gjelder i singaporeanske lærebøker.

Analysen av det faglige innholdet viser også en tendens til flere matematiske regler i de norske enn i de singaporeanske lærebøkene. Det kan gi økt instrumentell forståelse, men samtidig gå utover den relasjonelle forståelsen. I tillegg peker Erlwanger fra 1975 og Wiliam fra 2007, i Vogt og Nordtvedt (2012), på at et slikt overfokus på regler kan føre til misoppfatninger. Lite regelfokus i de singaporeanske lærebøkene kan forklares av økt fokus på relasjonell forståelse gjennom «activities»-delen og forklaringstekstene i «cours»-delen. Den relasjonelle forståelsen kan være tilstrekkelig til at elevene selv klarer å komme fram til og reprodusere reglene som ikke er i lærebøkene.

Videre viste analysen at Sigma 1T og M1T inneholder pensum om dobbeltderivasjon som tilhører pensum på senere klassetrinn. Dette faglige innholdet gir elevene erfaring med flere tilfeller av anvendelser av derivasjon, noe som er positivt for begrepsbildet. I tillegg kan det starte modningsprosessen for det senere pensumet i derivasjon.

Analysen viste en generell tendens til mer liknende faglig innhold mellom de to singaporeanske lærebøkene enn mellom de tre norske lærebøkene. Analysen av læreplanmålet for derivasjon i Norge og i Singapore kan forklare denne forskjellen (se delkapittel 4.2.1). Den singaporeanske læreplanen inneholder kompetansemål der det faglige innholdet spesifiseres i større grad enn i den norske læreplanen. Det er dermed mindre klart hva som skal med i de norske lærebøkene, og det kan gi ulik mulighet til å lære derivasjon blant norske elever med ulike lærebøker. En annen mulig forklaring er det offentlige godkjenningssystemet av lærebøkene i Singapore som kontrollerer innholdet. Et slikt system finnes ikke i Norge, og gir dermed ingen felles standard for lærebøkene.

5.2 Hvilket læringsutbytte kan oppgavene i derivasjonskapitlet i de norske og i de singaporeanske lærebøkene gi?

Dette delkapitlet omhandler diskusjon av hvordan matematikkoppgavene i lærebøkene og oppgaveløsing kan påvirke elevenes mulighet til å lære derivasjon. Vi skal diskutere resonnering, ferdighetstrening, vanskelighetsgrad på oppgavene, ulike oppgavetyper og differensiering.

5.2.1 Kreativ og imiterende resonnering under oppgaveløsing

Muligheter til å resonnere imiterende eller kreativt er aspekter ved matematikkoppgaver som kan påvirke elevenes mulighet til å lære derivasjon. Funnene fra analysen viste at IR-kategorien er den største kategorien blant alle lærebøkene (se side 41). Det betyr et større fokus på å øke elevenes instrumentelle forståelse. Elevene kan klare å løse oppgavene med instrumentell forståelse og få resultater på kort sikt, men stor grad av imiterende resonnement kan gi utfordringer for læring på lengre sikt (Lithner, 2008). Kreativt resonnement og relasjonell forståelse kan gjøre matematikken mer meningsfull for elevene (Lithner, 2008), noe som kan tenkes å gi langsiktige resultater. I den forbindelse viser funn fra den kvantitative oppgaveanalysen at elevene som leser AM og DAM får mer øvelse i kreativt resonnement enn lesere av de norske lærebøkene (se kapittel 4.1.1). Dette gir større muligheter til økt relasjonell forståelse og dermed en mer funksjonell matematikkunnskap, som L. S. Grønmo og Throndsen (2006) trekker frem som viktig for gode prestasjoner. På den måten kan kreativ resonnering gi et bedre læringsutbytte på lenger sikt. Oppgaveløsing med kreativt resonnement kan også motivere elevene ved å gjøre matematikken mer meningsfull (Lithner, 2008).

Vi oppfatter at det er flere mulige årsaker til den skjeve fordelingen mellom oppgaver som krever imiterende og kreativt resonnement. En årsak som gjelder alle lærebøkene er at oppgaver som krever kreativt resonnement ofte er mer tidkrevende å løse, og kan av den grunn bli nedprioritert. En årsak som kun gjelder de singaporeanske lærebøkene er at vi gjorde et begrenset utvalg av oppgavene i derivasjonskapitlene i henhold til det norske læreplanmålet for derivasjon i Matematikk 1T. Kategorisering av *alle* derivasjonsoppgaver i DAM og AM kunne gitt en annen fordeling. Vårt inntrykk er imidlertid at funnene våre fra det begrensede utvalget viser den generelle tendensen i de singaporeanske lærebøkene.

5.2.2 Ferdighetstrening, variasjon og vanskelighetsgrad

Kategoriseringen av oppgaver etter resonnementstype ga oss også informasjon om totalt antall oppgaver i lærebøkene (se Tabell 5 side 41). Det er noen flere oppgaver i de norske enn i de singaporeanske lærebøkene innenfor de temaene som dekker derivasjonspensumet i Matematikk 1T. Elevene som leser de norske lærebøkene får dermed noe mer ferdighetstrening, men totalt sett har norske og singaporeanske elever liknende mulighet til å automatisere ferdigheter, og det kan, i henhold til L. S. Grønmo (2005), frigjøre kognitiv kapasitet.

Tendensen til variasjon og høyere vanskelighetsgrad blant oppgavene er noe sterkere i de singaporeanske lærebøkene enn i de norske. Variasjon blant oppgavene kan gi økt motivasjon, spesielt dersom oppgavene er knyttet til praktiske anvendelser. Dette gjelder for eksempel oppgavene «Class Discussion» i AM og «Your Maths Journal» i DAM (se henholdsvis side 76 og 77). I begge oppgavene skal elevene reflektere over praktiske anvendelser av derivasjon. Videre kan høyere vanskelighetsgrad på oppgavene gi økt kompetanse. Funnene diskutert i dette avsnittet kan tyde på mer fokus på kvalitet enn kvantitet når det gjelder oppgavene i de singaporeanske lærebøkene. Tilsvarende kan det være et større fokus på kvantitet i de norske lærebøkene, grunnet det Brekke (1995) omtaler som en tradisjon om repetitiv oppgaveløsing for å styrke elevenes ferdigheter.

5.2.3 Oppgavetyper og mulighet til å lære derivasjon

Oppgavetypene vi fant i lærebøkene var refleksjonsoppgaver, oppgaver knyttet til den induktive metoden, blandede oppgaver, konsolideringsoppgaver, oppgaver knyttet til tolkningen av den deriverte, samt oppgaver som kan løses med flere fremgangsmåter.

Løsning av *refleksjonsoppgaver* kan gi økt relasjonell forståelse. Årsaken til dette er at elevene må reflektere over det metodiske og de matematiske sammenhengene gjennom for eksempel å begrunne et svar eller beskrive hva svaret forteller. Gjennom slike refleksjoner abstraheres prosedyrer (Carpenter & Lehrer, 1999), og de oppgavene som i utgangspunktet kun krever instrumentell forståelse, krever da også relasjonell forståelse. Funnene fra den kvalitative oppgaveanalysen (se kapittel 4.2.4) viser at det er størst variasjon av refleksjonsspørsmål i M1T og Sigma 1T. En slik vektlegging av refleksjonsoppgaver kan gi elevene en vane med å reflektere over svaret på oppgaver. I tillegg kan evnen til refleksjon ses i sammenheng med evnen til å tilegne ny kunnskap, noe L. S. Grønmo og Throndsen (2006) påpeker. Tendensen til refleksjonsspørsmål blant oppgavene i oppgavesamlingen i DAM, AM og Sinus 1T er noe svakere. Elevene som leser disse tre bøkene får imidlertid mulighet til å reflektere over metoder og matematiske sammenhenger ved å løse *oppgaver knyttet til den induktive metoden* (se kapittel 4.1.2). I AM får elevene i tillegg mulighet til å reflektere gjennom oppgavene «Thinking Time» (se side 75).

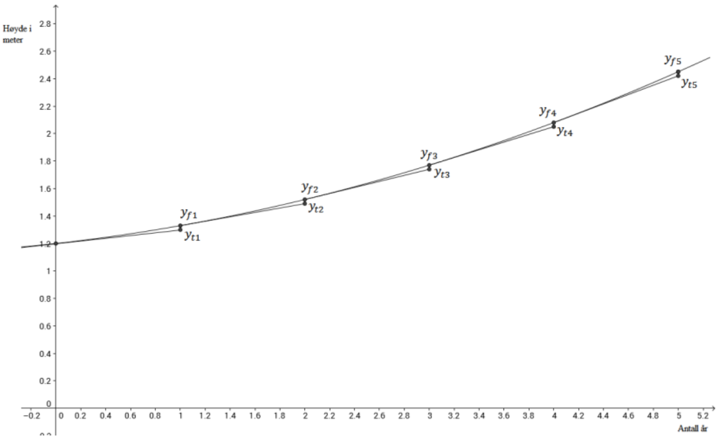
Oppgaver knyttet til den induktive metoden kan også fremme relasjonell forståelse ved utforsking av matematiske sammenhenger (se eksempelvis side 76 for en slik type oppgave). Vår oppfatning er at utforskningsaktivitetene i AM og DAM, som er tilknyttet den induktive metoden, kan gi økt forståelse for matematikken, økt motivasjon og et godt læringsutbytte. Enkelte analysefunn viser imidlertid visse aspekter ved oppgavene som kan forbedres. I den første «Class activity» i DAM (se side 77) kunne det vært et spørsmål om hva tolkningen av $\frac{dy}{dx}$ i deloppgave c) er for noe, for da må elevene trekke flere slutninger selv. Det kan gi økt forståelse med enda flere slike spørsmål om matematikken i utforskningsoppgavene. En annen forbedring av en utforskningsoppgave gjelder «Investigation»-oppgaven som omhandler utforsking av stasjonære punkter i AM (se side 76). Denne kunne gitt økt læringsutbytte dersom den hadde kommet før forklaringsteksten der det som skal utforskes står beskrevet. Når elevene har lest teori om det de skal komme fram til i «Investigation»-oppgaven, kan det, i henhold til Solvang (1992), virke demotiverende.

Blandede oppgaver er en annen oppgavetype som kan påvirke elevenes mulighet til å lære på en positiv måte. I henhold til funn fra den kvalitative oppgaveanalysen (se side 78) har alle lærebøkene blandede oppgaver, men i noe ulik grad. Ettersom denne oppgavesamlingen inneholder oppgaver på tvers av alle temaer i derivasjonskapitlet, uten referanser til hvilket matematisk emne oppgavene er knyttet til, kreves det av elevene at de tenker over hvilke matematiske emner og regler som er relevante for oppgavene. Da tvinges elevene i større grad til å se sammenhenger i matematikken, og det kan øke deres relasjonelle forståelse. Et annet aspekt ved blandede oppgaver som kan øke relasjonell forståelse er redusert bruk av imiterende resonnement. Uten underoverskrifter som relaterer oppgavene til de ulike matematiske temaene, blir det ikke like enkelt å finne liknende eksempler eller annen informasjon å følge. En annen fordel med blandede oppgaver er at elevene forberedes til prøver og eksamener der oppgavene ikke er delt inn i etter emner med overskrifter.

Gjennom å løse *konsolideringsoppgaver* kan elevenes læringsutbytte økes. Dette støttes av Bø og Helle (2008) som påpeker at konsolidering styrker tankeskjemaer. Funn fra oppgaveanalysen (se eksempelvis side 75) viser at de singaporeanske lærebøkene har konsolideringsoppgaver som kan ha en noe større effekt enn de i de norske lærebøkene har. Det gjelder oppgavene «Try it!» og «Practice now», som kommer rett etter et lignende eksempel. I disse oppgavene er det også referanser til andre oppgaver i oppgavesamlingen bak i kapitlet som gir økt konsolidering av det samme emnet. Denne refereringen kan imidlertid gjøre det enklere for elevene å bruke imiterende resonnement for å løse oppgavene bak i kapitlet.

I Sigma 1T, M1T og Sinus 1T finnes det oppgaver som kan gi økt forståelse for *tolkningen av den deriverte* (se kapittel 4.2.4). Fokus på hva den deriverte representerer og hva som er hensikten med derivasjon, kan øke elevenes relasjonelle forståelse. Vi forstår hensikten med derivasjon som å tilnærme gjennomsnittlig vekstfart over korte intervaller til stigningstallet til tangenten gjennom et punkt, som med andre ord er den deriverte. Oppgavene i Sigma 1T og M1T er de mest interessante av denne typen, og vi diskuterer derfor kun de to i det følgende. Kostnadsoppgaven i M1T (se side 73) er et godt eksempel på en oppgave som kan øke forståelsen for tolkningen av den deriverte. Grafen til kostnadsfunksjonen viser at tangenten gjennom $x = 500$ ligger svært nær veksten fra $x = 500$ enheter til $x = 501$ enheter, fordi dette intervallet er så lite i forhold til totalt antall enheter. Stigningstallet til tangenten gjennom $x = 500$, eller den deriverte, er derfor en god tilnærming til denne veksten.

Oppgaven knyttet til tolkningen av den deriverte i Sigma 1T (se side 74) gir ikke økt forståelse for tolkningen av den deriverte slik den er. For økt forståelse av derivasjon mener vi at det er nødvendig med lærer-elev-lærebok-samspillet, som Herbjørnsen (1999) trekker frem, i dette tilfellet. Læreren kan for eksempel tegne opp Figur 35 for å vise at den deriverte er en god tilnærming til veksten i ett punkt ved kortere tidsrom. Summen av vekstfarten i hvert punkt kan dermed gi en god tilnærming til treets vekst i løpet av fem år. Det er også mulig å tilnærme veksten ved å finne den deriverte i $t = 0$ og multiplisere denne med tallet 5. Dette vil gi en dårligere tilnærming, fordi $\Delta x = 5$ er en relativt stor verdi. Elevene får i dette tilfellet erfart viktigheten av et lite intervall for en god tilnærming ved derivasjon.



Figur 35: Illustrasjon i forbindelse med løsning av oppgaven knyttet til tolkningen av derivasjon i Sigma 1T. Hentet fra Sigma 1T.

Funn fra analysen viste også oppgaver der elevene oppfordres til å bruke *flere ulike fremgangsmåter* for å løse den samme oppgaven (se kapittel 4.2.4). Disse oppgavene fant vi i M1T og Sigma 1T. Bruk av flere ulike fremgangsmåter kan gi et bredere begrepsbilde, fordi elevene får erfaringer med en matematisk idé på ulike måter (Brekke, 1995). Videre har de ulike lærebøkene også egne oppgavetyper som kan påvirke muligheten til å lære. I Sigma 1T gir oppgaver av typen «Les, skriv og snakk» et fokus på grunnleggende ferdigheter i henhold til læreplanen, samt en mulighet til økt matematikkompetanse. Gjennom arbeid med disse oppgavene får elevene mulighet til å sette ord på egne tanker i diskusjon med medelever og i arbeid med ulike skriveoppgaver. I AM, DAM og M1T er det også oppgaver der elevene skal diskutere matematikken (se kapittel 4.2.4). Eksempelvis gir «Snakke matte» i M1T flere muligheter til å sette ord på matematikken, og på den måten kan elevene finne ut om de har forstått matematikken i dialog med andre.

5.2.4 Oppgaver og differensiering

Funn fra strukturanalysen (se kapittel 0) viser at alle lærebøkene inneholder oppgaver delt inn etter vanskelighetsgrad. En slik nivådifferensiering kan gi større mulighet til å lære derivasjon i henhold til teori om den proksimale utviklingssonen til Vygotsky (delkapittel 2.5.2). Hver enkelt elev får utvidet den proksimale utviklingssonen ved å gjøre oppgaver tilpasset eget nivå. I den forbindelse er det imidlertid viktig med samspill mellom elev, lærer og lærebok for at nivådifferensieringen skal fungere optimalt. Læreren kan hjelpe elevene med å velge best tilpasset vanskelighetsgrad på oppgavene for best mulig utvikling fra eget utgangspunkt.

En annen hensikt med nivådifferensiering av oppgaver er å motivere elevene i henhold til flytsonemodellen (Mathiassen, 2009). Elever er i flytsonen når det er balanse mellom elevenes ferdigheter, med andre ord det nivået de er på, og de utfordringene elevene får, det vil si vanskelighetsgraden på oppgavene. Det har påvirkning på motivasjon og læringsutbytte med tanke på progresjon fra eget utgangspunkt. Funn fra analysen viser i den forbindelse enkelte tilfeller av en relativt «brå» overgang fra forholdsvis enkle oppgaver til ganske utfordrende oppgaver i de norske lærebøkene. Når vanskelighetsgraden endres raskt, og ikke gradvis, kan det tenkes å virke demotiverende og redusere læringsutbyttet i henhold til flytsonemodellen. Vår oppfatning er at endringen av vanskelighetsgrad er mer gradvis blant oppgavene i de singaporeanske lærebøkene.

Flere av de ulike oppgavetypene i lærebøkene kan også virke differensierende. Etter vår mening er «Les, skriv og snakk»-oppgavene i Sigma 1T gode oppgaver der elevene kan diskutere matematikken sammen og støtte hverandre for utvidelse av deres respektive proksimale utviklingssoner. Videre kan oppgavene der det oppfordres til bruk av flere ulike fremgangsmåter også virke differensierende. Slike oppgaver kan bedre tilpasses flere elever ettersom elever tenker og lærer på ulike måter, og dermed har ulike måter å løse samme problem på.

5.3 Hva inkluderes av de nødvendige forkunnskapene til derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene, og på hvilke klassetrinn?

Dette delkapitlet omhandler diskusjon av den faglige progresjonen i lærebøkene fra åttende trinn og SEC1 til VG1 og SEC4 i Norge og Singapore. Diskusjonen omfatter både grunnlaget av forkunnskapene fra lærebøker på tidligere trinn og modningsprosess i forbindelse med muligheten til å lære derivasjon.

5.3.1 Forkunnskaper

Muligheten til å lære forkunnskaper i lærebøkene, både med tanke på det faglige innholdet og kompleksitet av dette i lærebøkene, er en forutsetning for læring av derivasjon. Et godt grunnlag av forkunnskaper, med eksisterende skjemaer som kan utvides, kan gjøre det enklere å tilegne ny kunnskap i henhold til Solvang (1992). Gode forkunnskaper kan også øke elevenes evne til å se sammenhenger mellom matematiske emner. Dette er viktig med tanke på at matematikkemner bygger på hverandre. I den forbindelse er det nødvendig med repetisjon, og funn fra analysen (se eksempelvis side 64) viser repetisjon i «Recall» og «Flashback» i henholdsvis AM og DAM. Det er ingen slik vektlegging av repetisjon i derivasjonskapitlene i de norske lærebøkene for VG1. Med repetisjon av tidligere forkunnskaper i de singaporeanske lærebøkene understrekes nytteverdien av det elevene har lært før, slik Solvang (1992) påpeker som et positivt aspekt for økt motivasjon. Dersom elevene i tillegg hadde gode opplevelser fra læring av disse forkunnskapene, kan troen på mestring av derivasjon økes.

Resultatene fra forkunnskapsanalysen viser varierende grunnlag av forkunnskaper fra de norske og singaporeanske lærebøkene for henholdsvis åttende trinn til VG1 og SEC1 til SEC4 (se kapittel 4.2.5). For det første inneholder de singaporeanske lærebøkene for SEC1 til SEC4 mer komplekse funksjoner og flere ulike funksjonstyper enn de norske lærebøkene for tilsvarende klassetrinn. Den samme tendensen gjelder forkunnskapen algebra, der funnene viser en høyere vanskelighetsgrad på de rasjonale uttrykkene som skal faktoriseres i oppgavene i lærebøkene. Det faglige innholdet i de singaporeanske lærebøkene kan bidra positivt til elevenes begrepsutvikling ved å gi elevene høyere vanskelighetsgrad på algebraoppgavene, i tillegg til mer erfaring med flere ulike og mer komplekse funksjoner. Dette kan også gjøre elevenes begrepsbilde bredere, både ved at de får se flere sider ved funksjonsbegrepet og får flere erfaringer med algebra. Videre er det nødvendig med et tilstrekkelig høyt ferdighetsnivå i algebra for mulighet til å lære derivasjon, da manipulering av algebraiske uttrykk er en viktig del av derivering. Dette gjelder spesielt ved bruk av grenseverdidefinisjonen av den deriverte.

Det faglige innholdet av de to forkunnskapene grenseverdier og stigningstall er mer liknende blant lærebøkene i Norge og Singapore med tanke på kompleksitet. Vår oppfatning er at elevene som leser Sinus 1T får et bedre grunnlag av kunnskap om grenseverdier enn lesere av de andre lærebøkene, ettersom analysefunnene viste den grundigste gjennomgang av denne forkunnskapen i Sinus 1T. Elevene som leser Sinus 1T lærer mer om grenseverdier før derivasjon innføres, og det kan gjøre det enklere å forstå derivasjonsbegrepet og spesielt grenseverdidefinisjonen av den deriverte. I M1T og Sigma 1T kommer teori om grenseverdier etter at derivasjonsbegrepet er innført, og elevene får dermed ikke det samme grunnlaget av denne forkunnskapen som lesere av Sinus 1T.

Når det gjelder stigningstall gir både norske og singaporeanske lærebøker den generelle formelen for stigningstall før derivasjonskapitlet. Leserne av alle lærebøkene kan derfor inneha like fagkunnskaper med tanke på innhold, men det er mer usikkert hvilken kvalitet det er på disse kunnskapene. Forkunnskapsanalysen (se side 82) viser en tendens til at $\Delta x = 1$ brukes i store deler av lærestoffet om stigningstall i de norske lærebøkene for tiende trinn og VG1. Funnene kan tolkes som lite vektlegging av den generelle formelen for stigningstall der Δx kan være en hvilken som helst annen differanse enn $\Delta x = 1$. En slik spesifisering av Δx i store deler av lærestoffet, oppfatter vi som en svært metodisk fremgangsmåte for å finne stigningstall. For det første kan det begrense elevenes begrepsbilde av stigningstall og momentan vekstfart. For det andre kan det gi lite relasjonell forståelse, om ikke kun instrumentell forståelse. Disse funnene stemmer overens med forskningen til Nilsen (2013). Ifølge Nilsen (2013) kan mangelen på et mer fleksibelt begrep om stigningstall være en av årsakene til de vanskelighetene elevene har med derivasjon. Det understreker viktigheten av gode forkunnskaper.

5.3.2 Modningsprosess

Kvalitet og lengde på modningsprosess er en annen viktig forutsetning for et godt grunnlag av forkunnskaper. Begrepsutvikling tar tid, og tiden fra forkunnskapene introduseres til de skal benyttes under læring av derivasjon er avgjørende for modningsprosessen og muligheten til å lære derivasjon. Årsaken til dette er at mer tid til modning gir mer effektive hierarkiske kognitive skjemaer i henhold til teorien til Sfard (1991).

Funn fra forkunnskapsanalysen (se side 85) viser at leserne av både de singaporeanske og norske lærebøkene får en lang prosess for modning av funksjonsbegrepet når det gjelder lineære funksjoner. Leserne av de norske lærebøkene får imidlertid kun ett år til modning av ikke-lineære funksjoner fra introduksjon i lærebøkene for tiende trinn til de skal deriveres i VG1. Disse funnene stemmer også overens med funnene til Nilsen (2013). Dette gir et relativt begrenset begrepsbilde av funksjoner over lenger tid for lesere av de norske lærebøkene. I de singaporeanske lærebøkene introduseres for eksempel andregradsfunksjoner i SEC2, noe som gir lenger tid for modning. En lang modningsprosess for funksjonsbegrepet gir lenger tid til reifikasjon, noe som er nødvendig for en oppfatning av funksjoner som objekter (Sfard, 1991). Dette påvirker muligheten til å lære derivasjon, da derivering utføres på funksjoner som objekter.

For forkunnskapen algebra, viste funn fra forkunnskapsanalysen (se side 87) at elevene som leser de singaporeanske lærebøkene introduseres for forenkling av rasjonale uttrykk tidligere enn leserne av de norske lærebøkene. Gjennom denne modningsprosessen har disse elevene fått lenger tid til å automatisere ferdigheter knyttet til forkorting av rasjonale funksjoner, og i følge L. S. Grønmo (2005) frigjør det kognitiv kapasitet for læring av andre aspekter ved derivasjon.

Videre viser analysefunn at de singaporeanske lærebøkene gir en lenger modningsprosess for den generelle formelen for stigningstall. Det gir lenger tid til reifikasjon for en oppfatning av stigningstallbegrepet som et objekt. Med lenger tid til læring av stigningstallbegrepet kan det tenkes at de singaporeanske elevene får flere erfaringer knyttet til begrepet, og derfor også et bredere begrepsbilde. For modning av momentan vekstfart, får leserne av DM lenger tid da dette presenteres tidligst i dette læreverket. Dette kan også gi elevene bedre forståelse for forskjellen mellom gjennomsnittlig og momentan vekstfart, noe som er sentralt for læring av derivasjon.

Når det gjelder forkunnskapen grenseverdier, viser funn fra forkunnskapsanalysen (se side 79) at tankegangen bak dette begrepet introduseres for første gang i de singaporeanske lærebøkene for SEC2 og for første gang i de norske lærebøkene for tiende trinn. Da grenseverdi ikke nevnes som et eget begrep før i VG1 og SEC4, kunne bruk av begrepet allerede i SEC2 og tiende trinn gitt bedre modning. Årsaken er at elevene kan relatere det de lærte om rasjonale funksjoner på SEC2 og tiende trinn til grenseverdier i derivasjon på VG1 og SEC4.

Det kan tenkes at de norske og singaporeanske læreplanene er årsaken til ulikheter mellom de to landenes lærebøker i forbindelse med modningsprosessen. Den norske læreplanens manglende føringer for når ulike matematiske emner skal undervises på ungdomsskolen, er en mulig forklaring på forskjellen. Progresjon av matematikk i den norske ungdomsskolen overlates i større grad til lærebokforfatterne, noe som kan gi varierende læring for leserne av de ulike lærebøkene Utdanningsdirektoratet (2014). Analysefunn viser i denne sammenheng at det mest avanserte lærestoffet ofte utsettes til slutten av ungdomsskolen. Dette gjelder blant annet forkorting av rasjonale uttrykk (se side 88). I tillegg utsettes flere av forkunnskapene, deriblant momentan vekstfart, den generelle formelen for stigningstall og grenseverdibegrepet (se delkapittel 4.2.5), til lærebøkene for VG1. Det gir norske elever kortere modningsprosess for disse emnene (Utdanningsdirektoratet, 2014). I tillegg er denne progresjonen preget av en tydelig rask endring av vanskelighetsgrad, noe som kan gi en ujevn progresjon. Ujevn progresjon kan videre føre til kognitiv belastning og gå utover elevenes motivasjon ved at de føler mindre mestring med et plutselig skifte i vanskelighetsgrad. Læreplanen i Singapore styrer progresjon av undervisningen i større grad, og kan dermed påvirke elevenes modningsprosess på en positiv måte. Dette støttes av analysefunn som viser en jevnere progresjon når det kommer til nivå på de faglige forkunnskapene i Singapore. Eksempelvis blir faktorisering gradvis vanskeligere fra SEC1 til SEC4 (se side 88).

Alt i alt kan momentene om modningsprosess og progresjon tyde på et *spiralprinsipp* (se delkapittel 2.3.2) i både Norge og Singapore, men at progresjonen er mer liknende en spiral i Singapore og en sirkel i Norge. Årsaken er at spiralprinsippet, som er en gradvis utviding av kunnskap for hver gang det samme emnet undervises, ikke kommer like tydelig frem i de norske lærebøkene for åttende trinn til VG1 som i de singaporeanske lærebøkene for SEC1 til SEC4. Vår oppfatning er at det er nødvendig å vende tilbake til de samme temaene på ulike tidspunkt ettersom de matematiske idéene bygger på hverandre, men at dette bør gjøres på en måte som fører til jevn progresjon. De singaporeanske lærebøkene har i tillegg elementer fra det Botten (1999) anser som et alternativ til spiralprinsippet; å arbeide lenger og grundigere med beslektede temaer. Ved en slik tilnærmingsmåte er fokus på aktiv elevrolle og relasjonell forståelse viktig, noe vi ser tendenser til i de singaporeanske lærebøkene.

6 Konklusjon

I denne masteroppgaven har vi studert et utvalg av norske og singaporeanske lærebøker for å undersøke muligheten bøkene gir til å lære derivasjon. Vi har undersøkt innholdet, språket, oppgavene og strukturen i derivasjonskapitlene, i tillegg til forkunnskaper til derivasjon i lærebøker for tidligere trinn. Dette kapitlet inneholder en oppsummering av de viktigste funnene fra analysen og sentrale refleksjoner fra diskusjonskapitlet i tilknytning til hvert forskningsspørsmål. Avslutningsvis besvarer vi problemstillingen og beskriver erfaringer fra forskningen. Se vedlegg nummer 1 og 2 for oversikt over hvilke lærebøker som tilhører hvilke land, samt forkortelser for lærebøkene.

6.1 Oppsummering av de viktigste funnene

Det første forskningsspørsmålet vårt er: *Hvordan formidles emnet derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene?* Formidling av derivasjon bygger på ulike læringsmodeller i lærebøkene; «exposition-examples-excercises»-modellen i de norske lærebøkene og «activities-cours-excercises»-modellen i de singaporeanske lærebøkene. Den sistnevnte modellen kan påvirke elevenes mulighet til å lære derivasjon ved å gi en aktiv elevrolle med mulighet til å konstruere kunnskap i større grad, og økt motivasjon for læring gjennom et eierforhold til egen læring (se side 90). Begge læringsmodellene kan gi økt instrumentell forståelse, men «activities-cours-excercises»-modellen i de singaporeanske lærebøkene kan bidra til å øke relasjonell forståelse i større grad enn «exposition-examples-excercises»-modellen i de norske lærebøkene (se side 89). Dette peker på et større fokus på økt relasjonell forståelse i de singaporeanske lærebøkene.

Formidling av derivasjon kan også påvirkes av lærebøkenes struktur. Alle lærebøkene er preget av farger og bilder, mens Sinus 1T har dette i minst grad. Lærebøkene er oversiktlige, men Sigma 1T er tettpakket og har en struktur som kan oppfattes som rotete (se side 91). Videre er derivasjonskapitlene i lærebøkene strukturert med innledning, hoveddel og avslutning. Innledningen er minst tydelig i Sinus 1T og M1T. I DAM, AM og Sigma 1T er innledningen preget av motiverende elementer, men som sannsynligvis er mest effektfulle for motivasjonen i DAM og AM (se side 91). Det er læreplanmål i derivasjonskapitlet i alle lærebøkene, men med unntak av M1T. Læreplanmål kan ha en positiv effekt på elevenes motivasjon ved å gi oversikt over det som skal læres (se side 91). Spesielt gjelder dette i

Sigma 1T der alle delkapitlene innledes av læringsmål (se side 91). Strukturen i alle lærebøkene, med unntak av i Sigma 1T, kan påvirke muligheten til å lære derivasjon med mer lystbetont og motiverende lesing. I tillegg kan innledningen vekke nysgjerrighet og arbeidslyst for videre læring, dette gjelder spesielt i AM, DAM og Sigma 1T (se side 92).

I delkapittel 5.1.2 diskuterte vi lærebøkenes forklaringer av derivasjon og hvordan disse kan påvirke muligheten til å lære. I AM og M1T er det tilfeller av at samme emner forklares på flere ulike måter, og det kan påvirke muligheten til å lære ved å utvide elevenes begrepsbilde. Videre inneholder alle lærebøkene visualiserende forklaringer, noen med matematiske illustrasjoner og noen der innholdet i teksten kan skape et mentalt bilde hos eleven. Konkretisering av de abstrakte matematiske idéene med visualiseringer kan gi økt relasjonell forståelse, samt ha en positiv påvirkning på elevenes indre tale. I tillegg oppfatter vi at visualisering av matematikken kan gi assosiasjoner for økt hukommelse. I lærebøkenes forklaringer er det også hyppig bruk av eksemplifiseringer, og det kan påvirke muligheten til å lære ved å utvide elevenes begrepsbilde. Samtidig kan mange eksempler ha negativ påvirkning ved å legge til rette for økt bruk av imiterende resonnement. Analysefunn viser imidlertid at eksemplene i lærebøkene inneholder noen forklaringer som kan gi økt relasjonell forståelse (se eksempelvis side 70). Eksemplene i lærebøkene kan også gi økt motivasjon med innhold om praktiske anvendelser av matematikken, og tendensen til dette er sterkest hos DAM og AM. Videre er det lite bevis i forklaringene. Flere bevis kan påvirke elevenes mulighet til å lære i større grad ved å øke deres relasjonelle forståelse.

Det matematiske språket kan påvirke formidlingen av lærestoffet, og det er noe ulikt i de norske og singaporeanske lærebøkene. Analysefunn fra delkapittel 4.2.3 viste bred begrepsbruk i lærebøkenes derivasjonskapittel, og at AM, DAM og M1T generelt sett har noen flere begreper enn de andre bøkene. I M1T forklares imidlertid ikke alle begrepene like godt. Reglene i Sigma 1T og AM forklares i flere tilfeller med både ord og symboler. I tillegg er det mer bruk av symboler i språket i DAM og AM, og i de norske lærebøkene er til og med enkelte regler og definisjoner skrevet med kun ord. Som diskutert i delkapittel 5.1.3 påvirker begreps- og symbolbruken i lærebøkene elevenes mulighet til å lære derivasjon og utvikle et matematisk språk. I tillegg kan lærebøkenes forklaring gi en økt forståelse for begrepene og symbolene, både med tanke på hvordan de defineres og hvordan de uttales. Dette kan påvirke elevenes indre tale på en positiv måte ved å gi dem verktøy til å tenke. Vi mener det er fordelaktig med både presise matematiske symboler og forklaringer med hverdagslig språk, og at reglene og definisjonene med et formelt matematisk språk bør utheves slik at elevene vennes til dette språket.

Det faglige innholdet i lærebøkenes derivasjonskapittel er også en viktig del av formidlingen (se delkapittel 5.1.4). Utelukking av deler av det faglige innholdet kan gi smalere begrepsbilde, kortere modningsprosess og et svakere grunnlag for videre læring. I tillegg viser det faglige innholdet et større regelfokus, og dermed større fokus på økt instrumentell forståelse, i de norske lærebøkene enn i de singaporeanske. Videre er det større forskjeller mellom de norske enn mellom de singaporeanske lærebøkene med tanke på faglig innhold. Den norske læreplanens manglende detaljnivå kan være en årsak til dette.

Det andre forskningsspørsmålet vårt er: *Hvilket læringsutbytte kan oppgavene i derivasjonskapitlet i de norske og i de singaporeanske lærebøkene gi?* Når det gjelder resonnering i forbindelse med løsning av derivasjonsoppgavene, er det generelt sett hovedvekt av imiterende resonnement i alle lærebøkene. I tillegg viser funnene at det er sterkest tendens til krav om kreativ resonnering i de singaporeanske lærebøkene (se delkapittel 4.1.1). Dette kan påvirke muligheten til å lære ved at kreativt resonnement kan øke relasjonell forståelse, og ved at både imiterende og kreativ resonnering kan gi økt kompetanse i oppgaveløsing (se delkapittel 5.2.1). Videre er det et relativt likt antall oppgaver i lærebøkene, men noen flere i de norske lærebøkene (se side 41). Mange oppgaver gir ferdighetstrening og gode muligheter til å øke instrumentell forståelse (se side 104). Det er også variasjon blant oppgavene i alle lærebøkene, men det er størst variasjon og flere oppgaver knyttet til praktiske anvendelser i de singaporeanske lærebøkene (se side 78). Dette kan gi bredere begrepsbilde og økt motivasjon. I tillegg så vi en tendens til at oppgavene i de singaporeanske lærebøkene generelt sett er av høyere vanskelighetsgrad enn oppgavene i de norske lærebøkene.

Det er flest refleksjonsoppgaver i M1T og Sigma 1T og flest oppgaver knyttet til den induktive metoden i AM, DAM og Sinus 1T (se side 78). I tillegg til blandede oppgaver, som alle lærebøkene inneholder, kan disse to oppgavetypene påvirke muligheten til å lære med innslag av kreativt resonnement og dermed mulighet for økt relasjonell forståelse (se side 105). Videre gir konsolideringsoppgaver mulighet til konsolidering og styrking av tankeskjemaer (se side 106), og vi oppfatter at oppgavene i AM og DAM kan ha størst effekt på konsolideringen. Oppgaver som krever flere ulike fremgangsmåter, som vi fant i de norske lærebøkene, kan gi bedre tilpasning av lærestoffet til elevenes nivå og et bredere begrepsbilde. Oppgaver knyttet til tolkningen av den deriverte, som vi fant én oppgave av i M1T, Sigma 1T og Sinus 1T, kan være spesielt viktige for muligheten til å lære derivasjon (se side 106). Disse oppgavene kan gi økt forståelse for *hva* derivasjon er og hva hensikten med derivasjon er.

Det tredje forskningsspørsmålet vårt er: *Hva inkluderes av de nødvendige forkunnskapene til derivasjon i de norske og i de singaporeanske lærebøkene, og på hvilke klassetrinn?* Grunnlaget av forkunnskapene til derivasjon er noe ulikt mellom de norske og singaporeanske lærebøkene (se delkapittel 4.2.5). De singaporeanske lærebøkene fra SEC1 til SEC4 kan gi kunnskaper i algebra og funksjoner på et høyere nivå enn de norske lærebøkene. Elevene som leser de norske lærebøkene introduseres for ikke-lineære funksjoner først på tiende trinn, kun ett år før de skal lære å derivere ikke-lineære funksjoner på VG1. De norske lærebøkene kan imidlertid gi høyere nivå for kunnskaper om grenseverdier, og dette gjelder i all hovedsak Sinus 1T. Forkunnskapene kan påvirke elevenes mulighet til å lære derivasjon ved å gi dem et grunnlag å bygge videre kunnskap på (se delkapittel 5.3.1). Forkunnskapene kan også gi elevene et bredere begrepsbilde av derivasjon gjennom erfaringer med flere ulike funksjoner og algebraiske uttrykk over lenger tid. Når det gjelder tiden for modning av forkunnskapene er denne generelt sett noe lenger for lesere av de singaporeanske lærebøkene (se delkapittel 4.2.5). Eksempelvis introduseres den generelle formelen for stigningstall tre år før den introduseres i de norske lærebøkene, noe som vil gi lenger tid til reifikasjon og lenger tid til øving av ferdigheter knyttet til forkunnskapene. Dette kan tenkes å bedre muligheten for å lære derivasjon (se delkapittel 5.3.2). Også i denne forbindelse kan læreplanen forklare forskjellig modningsprosess og progresjon i lærebøkene med mer spesifikt innhold på flere trinn i Singapore enn i Norge (se side 111).

6.2 Svar på problemstillingen

Problemstillingen vår er: *Hvilke muligheter gir norske og singaporeanske matematikklærebøker til å lære emnet derivasjon?* Begge landenes lærebøker kan gi gode muligheter til å lære derivasjon, men i ulik grad og på ulike måter. Lærebøkene leses også på ulik bakgrunn og dette har å gjøre med progresjon fra lærebøker på tidligere trinn, som diskutert i delkapittel 5.3. De singaporeanske lærebøkene kan gi en mer lignende mulighet for å lære derivasjon enn det de norske lærebøkene gir. En faktor kan være læreplanen i Norge som gir færre føringer og er mindre detaljert enn den singaporeanske (se side 102), samt det manglende godkjenningssystemet av lærebøker i Norge.

Alle lærebøkene kan gi mulighet til økt instrumentell og relasjonell forståelse med forklaringer og oppgaver. Det er flest oppgaver som krever imiterende resonnement i alle lærebøkene, men de singaporeanske lærebøkene kan gi en større mulighet for økt relasjonell forståelse med noen flere oppgaver som krever kreativt resonnement (se side 103). Vi oppfatter også at relasjonell forståelse kan økes i større grad gjennom lesing av de singaporeanske lærebøkene, på grunn av «acitivities-cours-excercises»-modellen. Elevene får da mulighet til å oppdage matematikken selv (se side 89), og de får en aktiv rolle i egen læring som kan gi økt motivasjon for læring (se side 90). Videre kan lesing av lærebøkenes eksempler, som det er flest av i de norske lærebøkene, redusere avstanden mellom elevenes begrepsbilde og begrepsdefinisjonen (se side 94). Dette kan hindre misoppfatninger, øke læringsutbyttet og gi en mer funksjonell matematikkunnskap.

Som diskutert i delkapittel 5.1.3 kan det matematiske språket i lærebøkene styrke elevenes indre tale og gi dem verktøy til å tenke og lære derivasjon. I den forbindelse kan de singaporeanske lærebøkene gi elevene større muligheter til å lære et presist matematisk språk med mange symboler (se side 98). Behovet for hverdagslige forklaringer tilfredsstilles i større grad i AM og Sigma 1T, der derivasjonsreglene også forklares med hverdagslig språk (se side 99). Videre viser diskusjonen i delkapittel 5.3.1 at lærebøkene gir et ulikt grunnlag av forkunnskaper. Når det gjelder stigningstall gir alle bøkene et lignende og holdbart grunnlag. Elevene som leser de singaporeanske lærebøkene tilegner seg kunnskaper om funksjoner og algebra på et høyere nivå. Grenseverdier blir gjennomgått grundigst i Sinus 1T, og kan gi elevene et bedre grunnlag. Diskusjonen i delkapittel 5.3.2 peker på et større fokus på modningsprosess og jevn progresjon i de singaporeanske lærebøkene for SEC1 til SEC4. Dette kan gi de singaporeanske elevene økt mulighet til reifikasjon og omstrukturering av kognitive skjema for mer effektiv læring.

Det er flere elementer i lærebøkene som kan forbedres eller legges til for å gi elevene en enda større mulighet til å lære derivasjon. Matematiske bevis, som for eksempel bevis av derivasjonsregler, kunne vært vektlagt i større grad for økt relasjonell forståelse. Det kunne vært flere oppgaver som krever kreativt resonnement, samt oppgaver som kan gi økt relasjonell forståelse for tolkningen av den deriverte. Videre finnes det flere andre faktorer enn læreboken som spiller inn på elevenes mulighet til å lære. Blant disse er matematikkundervisningen, lærerens kompetanse og holdninger til matematikk i samfunnet. For en optimal mulighet til å lære matematikk med lærebøker mener vi at lærer-elev-lærebok-samspillet er helt nødvendig. Et godt samspill mellom lærer og elev kan gjøre lærebokens innhold mer tilgjengelig for elevene, i tillegg til at læreren kan supplere med matematisk teori og didaktisk og pedagogisk kompetanse der det eventuelt er mangler i lærebøkene.

6.3 Erfaringer, refleksjoner og anbefalinger

Etter arbeidet med denne masteroppgaven sitter vi også igjen med noen flere tanker knyttet til norske elevers prestasjoner på de internasjonale storskalaundersøkelsene i matematikk. Begrunnelsen for valg av singaporeanske lærebøker for sammenligning med de norske, hadde bakgrunn i de sprikende resultatene mellom de to landene. Det kan tenkes at kvaliteten på lærebøkene er én mulig forklaring på de gode resultatene blant singaporeanske elevene og de relativt dårlige resultatene blant de norske elevene. Videre tror vi, med bakgrunn i vår oppfatning om læreplanens påvirkning på lærebøkene, at det kan være nyttig å hente inspirasjon fra den singaporeanske læreplanen i utformingen av læreplanen i matematikk i Norge. Det er viktig at læreplanen holder et høyt kvalitetsnivå slik at den blir et styringsverktøy for utforming av nye matematikklærebøker.

Etter å ha gjennomført analysen med vårt utvalg av metoder, er vi av den oppfatning at metodene stort sett har gitt oss realistiske resultater. Et unntak er rammeverket til Lithner for kategorisering av oppgaver etter resonnement. Resultatene fra bruk av denne metoden viste svært skjev fordeling mellom kategoriene. Det kan tyde på at rammeverket er for «grovt» og at det ikke fanger opp nyanser og variasjon mellom oppgavene i den grad vi hadde antatt. En mulig forbedring er å inkludere flere kategorier i rammeverket for måling av flere ulike aspekter og flere ulikheter mellom matematikklærebøkene i utvalget.

Arbeidet med dette forskningsprosjektet har gitt oss en bekreftelse på at det er nødvendig med enda mer forskning på *muligheten til å lære* og *matematikklærebøker*. Eksempelvis kan fremtidig forskning bygge videre på vår forskning ved å undersøke muligheten til å lære derivasjon på høyere skoletrinn enn VG1 og SEC4. En kan også utvide utvalget ved å undersøke forkunnskaper i lærebøker helt ned i barneskolen. Det hadde også vært interessant med forskning på muligheten til å lære andre matematiske emner med sammenligning mellom norske og singaporeanske lærebøker, og eventuelt lærebøker fra andre land. I tillegg kan det være interessant å benytte observasjonsmetode i forskningen for å undersøke bruk av matematikklærebøker i undervisningen.

Litteraturliste

Ary, D., Jacobs, L. C., & Sorensen, C. (2010). *Introduction to Research in Education* (8 utg.). Wadsworth: Cengage learning.

Baey, Y. K. (2012). Parlamentary Replies: Approval, Vetting and Review of Textbooks. Lastet ned 6. mai, 2015, fra http://www.moe.gov.sg/media/parliamentary-replies/2012/07/approval-vetting-and-review-of.php

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006a). *Grunntall 8: Matematikk for ungdomstrinnet* Tormod Hagen (Red.), Hentet fra http://ugrunntall.com/grunntall-8/#page/2

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006b). *Grunntall 9: Matematikk for ungdomstrinnet* Tormod Hagen (Red.), Hentet fra http://ugrunntall.com/grunntall-9/#page/2

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2007). *Grunntall 10: Matematikk for ungdomstrinnet* Tormod Hagen (Red.), Hentet fra http://ugrunntall.com/grunntall-10/#page/1

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 348-370. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.11.001

Berisha, V., Thaçi, X., Jashari, H., & Klinaku, S. (2013). Assessment of Mathematics Textbooks Potential in Terms of Student's Motivation and Comprehension. *Journal of Education and Practice, 4*(28), 33-37.

Botten, G. (1999). *Meningsfylt matematikk - nærhet og engasjement i læringen*. [Landås]: Caspar forlag.

Bowen, G. A. (2009). Document Analysis as a Qualitative Reaserch Method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27-40. doi: 10.3316/QRJ0902027

Brekke, G. (1995). *Kartlegging av matematikkforståelse: Introduksjon til diagnostisk undervisning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter. Lastet ned fra http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/Bestillingstorg/PDF/59447_KAR_MAT_007_innmat.pdf.

Bråten, I. (1996). Om Vygotskys liv og lære. I I. Bråten (Red.), *Vygotsky i pedagogikken* (s. 13-42). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Bråten, I., & Thurmann-Moe, A. C. (1996). Den nærmeste utviklingssonen som utgangspunkt for pedagogisk praksis. I I. Bråten (Red.), *Vygotski i pedagogikken* (s. 123-143). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag

Bø, I., & Helle, L. (2008). *Pedagogisk ordbok: Praktisk oppslagsverk i pedagogikk, psykologi og sosiologi* (2. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics With Understanding. I E. Fennema & T. A. Romberg (Red.), *Mathematics classrooms that promotes understanding* (s. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Center for Teaching and Learning. (2008). What Is Active Learning? Hentet, 04.04, 2015, fra http://www1.umn.edu/ohr/teachlearn/tutorials/active/what/index.html

Chow, W. K., & Ling, S. (2007a). *Discovering Mathematics 1A*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Chow, W. K., & Ling, S. (2007b). *Discovering Mathematics 1B*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Chow, W. K., & Ling, S. (2007c). *Discovering Mathematics 3A*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Chow, W. K., & Ling, S. (2008a). *Discovering Mahematics 2A*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Chow, W. K., & Ling, S. (2008b). *Discovering Mathematics 4B*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Chow, W. K., & Ling, S. (2010). *Discovering Additional Mathematics*. Singapore: Star Publishing PTE LTD.
Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7. utg.). Oxon: Routledge.
Fereday, J., & Muir-Cochrane, E. (2006). Demonstrating Rigor Using Thematic Analysis: A Hybrid Approach of Inductive and Deductive Coding and Theme Development. *International Journal of Qualitative Methods, 5*(1), 80-92. Hentet fra http://www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/5_1/PDF/FEREDAY.PDF
Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education, 10*(4), 391-408.
Gjone, G., & Brekke, G. (2001). Kap. 6: Matematikk. I S. Sjøberg (Red.), *Fagdebatikk. Fakdidaktisk innføring i sentrale skolefag* (s. 215-265). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.
Gravenmeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example *Educational Studies in Mathematics 39*(1/3), 111-129.
Grønmo, L. S. (2005). Ferdighetenes plass i matematikkundervisningen. *Nämnaren, 32*(4), 28-44.
Grønmo, L. S., Hole, A., Aslaksen, H., Onstad, T., Nilsen, T., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram*. Oslo: Akademika forlag.
Grønmo, L. S., Olsen, R. V., & Bergem, O. K. (2005). PISA 2003 og TIMSS 2003: Hva forteller disse undersøkelsene om norske elevers kunnskaper og ferdigheter i matematikk? *Norsk pedagogisk tidsskrift, 89*(1), 111-124.
Grønmo, L. S., Onstad, T., & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motivnd*. Oslo: Unipub.
Grønmo, L. S., & Throndsen, I. S. (2006). Læringsstrategier i matematikk. I E. Elstad & A. Turmo (Red.), *Læringsstrategier: søkelys på lærernes praksis* (s. 178-195). Oslo: Universitetsforlaget.
Grønmo, S. (2004). *Samfunnsvitenskapelige metoder*. Bergen: Fagbokforlaget.
Hanna, G. (2001). Proof, Explanation and Exploration: An Overviw. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/pdf/3483203.pdf?acceptTC=true
Harskam, E., & Suhre, C. (1994). Assessing the Opportunity to Learn Mathematics. *Evaluation Review, 18*(5), 627-642. Hentet fra http://erx.sagepub.com/content/18/5/627.full.pdf
Heir, O., Engeseth, J., Moe, H., & Borgan, Ø. (2014). *Matematikk 1T* (D.-E. Møller Red. 3. utg.). Oslo: Aschehoug.
Hellan, S. (2013). *En læreverkstudie av overgangen fra skolematematikk til universitetsmatematikk.* (Masteroppgave), Universitetet i Tromsø, Tromsø. Hentet fra http://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/5293/thesis.pdf?sequence=2
Helland, T., Manger, T., Lillejord, S., & Nordahl, T. (2010). Kap. 5: Vi lærer hele tiden *Livet i skolen: Grunnbok i pedagogikk og elevkunnskap* (s. 119-151). Bergen: Fagbokforlaget.
Herbjørnsen, O. (1999). Matematikkbøker og andre lærebøker. I E. B. Johansen (Red.), *Lærebokkunskap: innføring i sjanger og bruk* (s. 78-87). Oslo: Tano Aschehoug.
Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. I Douglas A Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.
Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2006a). *Faktor 1: Grunnbok* Hentet fra http://issuu.com/cdundervisning/docs/faktor1gb_bmblabok_red

Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2006b). *Faktor 2: Grunnbok* Hentet fra http://issuu.com/cdundervisning/docs/faktor2gb_red
Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2007). *Faktor 3: Grunnbok* Hentet fra http://issuu.com/cdundervisning/docs/faktor3gb_red
Hole, A. (2006). *Grunnleggende matematikk i skoleperspektiv* (4. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.
Holm, M. (2012). *Opplæring i matematikk* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.
Hovik, E. K. (2006). *Tall- og algebrakunnskaper hos norske 8. klassinger.* (Hovedfagsoppgave), Universitetet i Oslo, Oslo.
Imsen, G. (2005). Kap. 15: Følelser og motivasjon. I G. Imsen (Red.), *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi* (4 utg., s. 375-410). Oslo: Universitetsforlaget.
Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261. doi: 10.1007/s10649-008-9174-9
Johansson, M. (2005). The mathematics textbook: from artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education, 10*(3-4), 43-64.
Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20-32. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.08.003
Kozulin, A. (2012). Foreword (2012). I L. Vygotsky (Red.), *Thougth and Language* (s. ix - xxiv). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
Leung, C. (2005). Mathematical Vocabulary: Fixers of Knowledge or Points of Explorations? *Language and Education, 19*(2), 126-134. doi: 10.1080/09500780508668668
Lindstrøm, T. L. (2006). *Kalkulus* (3. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.
Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.
Lithner, J. (2012). *Learning Mathematics By Creative Or Imitative Reasoning*. Paper presentert ved 12th International Congress on Mathematical Education, COEX, Seoul, Korea. http://www.icme12.org/upload/submission/1971_f.pdf
Maharaj, A. (2008). Some insights from research literature for teaching and learning mathematics. *South African Journal of Education, 28*(3), 401-414.
Mathiassen, K. (2009). Differensiert undervisning. I R. Mikkelsen & H. Fladmoe (Red.), *Lektor - adjunkt - lærer: Artikler for studiet i praktisk-pedagogisk utdanning* (2 utg., s. 123 - 135). Oslo: Universitetsforlaget.
Maxwell, J. A. (1996). *Qualitative research design : an interactive approach* (Vol. 41). Thousand Oaks, California: Sage Pulications.
Mellin-Olsen, S. (1981). Instrumentalism as an educational concept. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 351-367. doi: 10.1007/BF00311065
Ministry of Education, S. (2006). *Secondary Mathematics Syllabuses*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division Lastet ned fra http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-secondary.pdf.
Ministry of Education, S. (2012a). *Addtional Mathematics (O- and N(A)-Level): Teaching and Learning Syllabus*. Hentet fra http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/normal-academic-level-additional-maths-2013.pdf.
Ministry of Education, S. (2012b). *O- and N(A)-Level Mathematics: Teaching and Learning Syllabus*. Hentet fra http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/ordinary-and-normal-academic-level-maths-2013.pdf.

Morgan, C. (2005). Words, Definitions and Concepts in Discourses of Mathematics, Teaching and Learning. *Language and Education, 19*(2), 102-116. doi: 10.1080/09500780508668666
Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2011). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics* Hentet fra http://timss.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf
Nilsen, H. K. (2013). *Learning and Teaching Functions and the Transition from Lower Secondary School to Upper Secondary School.* (Doktorgradavhandling), Universitetet i Agder, Kristiansand. Hentet fra http://hdl.handle.net/11250/138132
Niss, M. (2006). The Structure of Mathematics and its Influence on the Learning Process. I J. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New Mathematics Education Research and Practice* (s. 52-62). Rotterdam: Sense Publishers.
Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*. København: Undervisningsministeriet.
OECD. (2010). PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do - Students Performance in Reading, Mathematics and Science *1*.Hentet fra http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/48852548.pdf doi:10.1787/9789264091450-en
Okeeffe, L. (2013). A Framework for Textbook Analysis. *International Review of Contemporary Learning Research, 2*(1), 1-13. Hentet fra http://www.uob.edu.bh/uob__files/652/V2-issue1.pdf
Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2009). *Sinus 1T : Matematikk for Vg1 : Studieforberedende program* (2. utg.). Oslo: Cappelen Damm.
Olsen, R. V., & Kjærnsli, M. (2013). *Fortsatt en vei å gå*. Oslo: Universitetsforlaget.
Onstad, T., & Grønmo, L. S. (2012). Norway. I I. V. S. Mullis, M. O. Martin, C. A. Minnich, G. M. Stanco, A. Arora, V. A. S. Centurino & C. E Castle (Red.), *TIMSS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science. Volume 2: L-Z and Benchmarking Participants* (s. 669-680). Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.
Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2011). Mathematical Reasoning Requirements in Swedish Upper Secondary Level Assessments. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 221-246. doi: 10.1080/10986065.2011.564994
Pierce, M. E., & Fontaine, L. M. (2009). Designing vocabulary instruction in mathematics. *The Reading Teacher, 63*(3), 239-243. doi: 10.1598/RT.63.3.7
Pind, P. (2011). *Håndbok i matematikkundervisning*. [Oslo]: Cappelen Damm Akademisk.
Rapley, T. (2007). *Doing conversation, discourse and document analysis*. London: SAGE.
Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.
Singapore Math Inc. (2011). The Singapore Math® story. Lastet ned 09.05, 2015, fra http://www.singaporemath.com/Singapore_Math_Story_s/10.htm
Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.
Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action : A Foundation for Theory and Practice in Education*. Chichester: Wiley.
Solbakken, B. (2008). Rekruttering til realfag [PowerPoint slides]. Hentet fra http://intra.hinesna.no/system/files/Rekruttering%20til%20realfag%20Solbakken.pdf
Solvang, G. (1992). *Matematikk-didaktikk* (2 utg.). Bekkestua: NKI-forlaget.
Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching, 14*, 6-10.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular refrence to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151 - 169. doi: 10.1007/BF00305619
Tan, W. S. (2009). Education in Singapore : mathematics. *singapore infopedia.* Hentet, 06.05, 2015, fra http://eresources.nlb.gov.sg/infopedia/articles/SIP_1599_2009-10-31.html?v=1&utm_expid=85360850-6.qNOOYF40RhKK6gXsQEaAJA.1&utm_referrer=http%3A%2F%2Fwww.google.no%2Furl%3Fsa%3Dt%26rct%3Dj%26q%3D%26esrc%3Ds%26frm%3D1%26source%3Dweb%26cd%3D1%26ved%3D0CB0QFjAA%26url%3Dhttp%253A%252F%252Feresources.nlb.gov.sg%252Finfopedia%252Farticles%252FSIP_1599_2009-10-31.html%26ei%3DTcldVf3xHMb6UJrpgLAI%26usg%3DAFQjCNE_lyaLZRi-24K9hbM3e_B0jnnyyA%26sig2%3DkTGMo7Srcr0SXhDI3HE5bA%26bvm%3Dbv.93756505%2Cd.d24
Tan, Y. C., Chua, E. K.-Y., Puay, H. C., Seau, F. F., Mei, Y. L., Chew, L. P., . . . Yeen, P. Y. (2012). Singapore. I Ina V. S. Mullis, Michael O Martin, Chad A Minnich, Gabrielle M Stanco, Alka Arora, Victoria A. S. Centurino & Courtney E Castle (Red.), *TIMSS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science. Volume 2: L-Z and Benchmarking Participants* (s. 801-816). Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.
Teh, K. S., Loh, C. Y., & Yeap, B. H. (2007). *New Syllabus Mathematics 3* (6. utg.). Singapore: Shinglee.
Teh, K. S., Loh, C. Y., Yeo, J., Ivy, C., & Yeap, B. H. (2008). *New Syllabus Mathematics 4* (6. utg.). Singapore: Shinglee.
Thompson, D. R., & Rubenstein, R. N. (2000). Learning Mathematics Vocabulary: Potential Pitfalls and Instructional Strategies. *The Mathematics Teacher, 93*(7), 568-574.
Torkildsen, S. H., & Maugsten, M. (2006). *Sirkel 8B Grunnbok: Matematikk for ungdomstrinnet* (Tor Kjærstad Red.). [Oslo]: Aschehoug.
Torkildsen, S. H., & Maugsten, M. (2007). *Sirkel 9B Grunnbok: Matematikk for ungdomstrinnet* (Tor Kjærstad Red.). [Oslo]: Aschehoug.
Torkildsen, S. H., & Maugsten, M. (2008a). *Sirkel 10A Grunnbok: Matematikk for ungdomstrinnet*. [Oslo]: Aschehoug.
Torkildsen, S. H., & Maugsten, M. (2008b). *Sirkel 10B Grunnbok: Matematikk for ungdomstrinnet* (Tor Kjærstad Red.). [Oslo]: Aschehoug.
Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation, 31*(4), 315-327. doi: 10.1016/j.stueduc.2005.11.005
Utdanningsdirektoratet. (2013a). Føremål. *Læreplan i matematikk fellesfag.* Hentet fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal/
Utdanningsdirektoratet. (2013b). Læreplan i matematikk fellesfag - kompetansemål: Kompetansemål etter 1T – Vg1 studieførebuande utdanningsprogram. Hentet, 18. 05, 2015, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=1858830316&kmsn=2088314978
Utdanningsdirektoratet. (2014). Matematikk i norsk skole anno 2014: Faggjennomgang av matematikkfagene - Rapport fra ekstern arbeidsgruppe oppnevnt av Utdanningsdirektoratet. Hentet fra http://www.udir.no/PageFiles/89051/Matematikk_norsk_skole_2014_rapport_ekstern_arbeidsgruppe.pdf?epslanguage=no
Utdanningsdirektoratet. (2015). *Eksamensveiledning - om vurdering av eksamensbesvarelser*. Utdanningsdirektoratet. Hentet fra https://dok.udir.no/DokumenterAndrekataloger.aspx?proveType=Ev.

Utdanningsdirektoratet. (u. å.). Talet på elevar fellesfag. Hentet 19.05, 2015, fra https://skoleporten.udir.no/rapportvisning.aspx?enhetsid=00&vurderingsomrade=32&underomrade=34&skoletype=1&skoletypemenuid=1

Vogt, G. O., & Nordtvedt, G. A. (2012). Når matematikk blir vanskelig. Matematikkvansker i elev- og undervisningsperspektiv. I E. Befring & R. Tangen (Red.), *Spesialpedagogikk* (5 utg., s. 370-384). Oslo: Cappelen Damm Akademsik Forlag.

Wheatley, G. H. (1992). The role of reflection in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 23*(5), 529-541.

Wong, K. Y., & Lee, N. H. (2009). Singapore Education and Mathematics Curriculum. I K. Y. Wong., P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong & S. F. Ng (Red.), *Mathematics Education: The Singapore Journey* (Vol. 2, s. 13-47). Singapore: World Scientific.

Yeo, J., Teh, K. S., Loh, C. Y., & Ivy, C. (2013). *New Syllabus Additional Mathematics* (9. utg.). Singapore: Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Yeo, J., Teh, K. S., Loh, C. Y., Ivy, C., Meng, N. C., Liew, J., . . . Yeap, B. H. (2014). *New Syllabus Mathematics 2* (7. utg.). Singapore: Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Yeo, J., Teh, K. S., Loh, C. Y., Ivy, C., Meng, N. C., Liew, J., & Yeap, B. H. (2013). *New Syllabus Mathematics 1* (7. utg.). Singapore: Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609 - 626. doi: 10.1007/s10763-006-9036-9

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization? I W. Zimmermann & S. Cunningham (Red.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (s. 1-8). Washington, D. C.: Mathematical Association of America

Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Thorstensen, A., & Thorstensen, R. (2013). *Sigma 1T matematikk: studieforberedende matematikk 1T* (3. utg.). [Oslo]: Gyldendal Undervisning.

Øzrek, K. Z. (1996). Ulike språkoppfatninger, begrepskategorier og et undervisningsteoretisk perspektiv på skolefaglig læring. I I. Bråten (Red.), *Vygotsky i pedagogikken* (s. 97-122). Oslo: Cappelen Akademisk Forlag.

Figurer

Tabeller

Vedlegg

Vedlegg 1: Oversikt over alle læreverkene i utvalget vårt

	Norge			Singapore	
8.trinn/ SEC1	*Grunntall 8* Elektronisk Undervisnings-forlag AS	*Faktor 1* Cappelen Damm	*Sirkel 8* Aschehoug	*New Syllabus Mathematics 1* Shing Lee Publishers	*Discovering Mathematics 1* Star Publishing
9.trinn/ SEC2	*Grunntall 9* Elektronisk Undervisnings-forlag AS	*Faktor 2* Cappelen Damm	*Sirkel 9* Aschehoug	*New Syllabus Mathematics 2* Shing Lee Publishers	*Discovering Mathematics 2* Star Publishing
10.trinn/ SEC3/ Additional Mathe matics	*Grunntall 10* Elektronisk Undervisnings-forlag AS	*Faktor 3* Cappelen Damm	*Sirkel 10* Aschehoug	*New Syllabus Mathematics 3* Shing Lee Publishers	*Discovering Mathematics 3* Star Publishing
VG1/ SEC4/ Additional Mathe-matics	*Sigma 1T.* Gyldendal	*Sinus 1T* Cappelen Damm	*Matematikk 1T* Aschehoug.	*New Syllabus Mathematics 4* Shing Lee Publishers ——— *Additional Mathematics* Shing Lee Publishers	*Discovering Mathematics 4* Star Publishing ——— *Discovering Additional Mathematics* Star Publishing

Vedlegg 2: Forkortelsene til matematikklærebøkene slik de omtales i teksten

Land	**Forkortelse**	**Lærebok**	**Trinn**
Singapore	*NSM1*	*New Syllabus Mathematics 1*	SEC1
	NSM2	*New Syllabus Mathematics 2*	SEC2
	NSM3	*New Syllabus Mathematics 3*	SEC3
	NSM4	*New Syllabus Mathematics 4*	SEC4
	DM1	*Discovering Mathematics 1*	SEC1
	DM2	*Discovering Mathematics 2*	SEC2
	DM3	*Discovering Mathematics 3*	SEC3
	DM4	*Discovering Mathematics 4*	SEC4
	AM	*Additional Mathematics*	SEC3/SEC4
	DAM	*Discovering Additional Mathematics*	SEC3/SEC4
Norge	*M1T*	*Matematikk 1T, Aschehoug*	VG1